Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

2. Erfolgskontrolle

1. Berechnen Sie

   (a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta\,(x-\pi)\ (\cos(x)+2),$$

   1 Punkt

   (b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta\left(x^2-\pi^2\right)\ (\cos(x)+2)\ !$$

   2 Punkte

   $\sum$: **3 Punkte**

---

2. Wir betrachten die Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen

$$\Delta\Psi(x,y) = 0\,.$$

   (a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten Sie für die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ in dem Separationsansatz

$$\Psi(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

   aus der Laplace-Gleichung ? Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen ? Beachten Sie die beiden möglichen Fälle des Vorzeichens der hierbei auftretenden Konstanten !

   4 Punkte

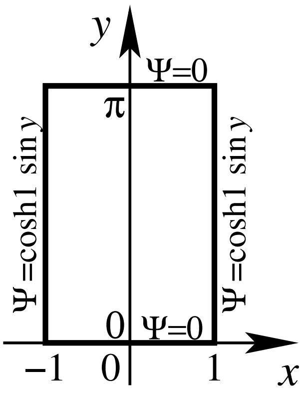
   (b) Auf dem Rechteck

$$-1 \le x \le 1\,, \qquad 0 \le y \le \pi$$

   sind nun die Randbedingungen

$$\Psi\,(x=\pm 1, y) = \cosh(1)\,\sin(y)\,, \qquad \Psi\,(x, y=0) = \ 0\ = \Psi\,(x, y=\pi)$$

   vorgegeben (vgl. nachfolgende Skizze). Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $\Psi(x,y)$ der Laplace-Gleichung !



   3 Punkte

   $\sum$: **7 Punkte**

---

3. Gegeben sei folgendes kugelsymmetrisches Potential in drei Dimensionen

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\,r}\,.$$

Geben Sie die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an !
Hinweis: $\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0\,\Delta\Psi$.

2 Punkte

---

4. Setzen Sie

$$\Psi_{\pm}(x,t) = \mathrm{e}^{\pm i(\omega t - kx)}$$

in die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t)$$

ein und diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen an den Wellenvektor k und die Frequenz ω Sie eine Lösung erhalten !

3 Punkte

---

5. Zeigen Sie:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}\,\sin((2l+1)\,x)$$

ist die Fourier-Reihe auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ zu der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x \leq \pi, \\ 1 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases} \qquad !$$

7 Punkte

---

6. Wir betrachten die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}\,.$$

Die Lösung kann als Fourier-Integral angesetzt werden

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\tilde{n}(k,t)\,\mathrm{e}^{ikx}\,.$$

(a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Koeffizienten $\tilde{n}(k,t)$? Geben Sie die Lösungen für $\tilde{n}(k,t)$ an ! Welche Integrationskonstanten treten in den Lösungen auf ?

4 Punkte

(b) Geben Sie die Lösung $n(x,t)$ der eindimensionalen Diffusionsgleichung zu den Anfangsbedingungen

$$n(x,0) = N\,\delta(x)$$

als Fourier-Integral an ! Führen Sie die k-Integration aus und stellen Sie das Endergebnis als Funktion von x dar !
Hinweis: $(\alpha > 0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{-\alpha k^2}\,\mathrm{e}^{ikx} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(4\alpha)}\,.$$

4 Punkte

$\sum$: **8 Punkte**
