Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
Institut für Theoretische Physik
Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

1. Erfolgskontrolle

1. Berechnen Sie den Gradienten des skalaren Feldes

$$A(x,y,z) = x\,y + z^2 \qquad !$$

1.5 Punkte

2. Wenden Sie den Laplace-Operator Δ auf das skalare Feld

$$A(x,y,z) = r^4 = (x^2+y^2+z^2)^2$$

an !

3 Punkte

3. Betrachten Sie die folgenden Vorschläge für die Form des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten angewandt auf ein Skalarfeld A

$$\Delta A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\right), \tag{1}$$

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\right), \tag{2}$$

$$\Delta A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A}{\partial\vartheta}, \tag{3}$$

$$\Delta A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\right). \tag{4}$$

Von diesen Vorschlägen sind genau 2 richtig. Geben Sie die Nummern der beiden richtigen Varianten an ! Begründen Sie kurz, warum die beiden anderen falsch sind !

2 Punkte

4. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{$\star$}$$

(a) Berechnen Sie die *Divergenz* des Vektorfeldes ($\star$) ! 1.5 Punkte

(b) Berechnen Sie explizit das Oberflächenintegral

$$\int_{\|\vec{r}\|=R} \vec{F}\,(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

für das Vektorfeld ($\star$) und die Oberfläche einer Kugel um den Ursprung mit Radius R !

2 Punkte

(c) Wie lautet der Gauß'sche Integralsatz allgemein ?
(Angabe der Formel)

2 Punkte

(d) Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Vektorfeld ($\star$) und eine Kugel um den Ursprung mit Radius R !

2 Punkte

$\sum$: **7.5 Punkte**

5. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ y \end{pmatrix} \quad . \qquad (\diamond)$$

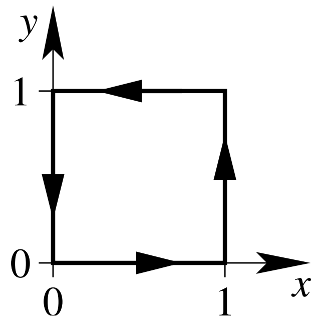
(a) Berechnen Sie die *Rotation* des Vektorfeldes ($\diamond$) !

2 Punkte

(b) Berechnen Sie explizit das Linienintegral

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

für das Vektorfeld ($\diamond$) entlang des folgenden geschlossenen Weges in der x-y-Ebene ($z = 0$) !



3 Punkte

(c) Wie lautet der Integralsatz von Stokes allgemein ?
(Angabe der Formel)

2 Punkte

(d) Verifizieren Sie den Stokes'schen Integralsatz für das Vektorfeld ($\diamond$) und das in Aufgabenteil (b) skizzierte Quadrat !

2 Punkte

$\sum$: **9 Punkte**

6.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung (oder ein Lösungs-Fundamentalsystem) des homogenen Differentialgleichungs-Systems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{z} = \vec{0}$$

an !

4 Punkte

(b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungs-Systems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{z} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

zu der Anfangsbedingung $\vec{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!

3 Punkte

$\sum$: **7 Punkte**