Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Vorbereitung auf 2. Erfolgskontrolle

1. Drücken Sie folgende Ladungsdichte $\rho(x)$ in einer Dimension mit Hilfe der δ-Distribution aus: Punkt-Ladungen mit Ladung q_1 bzw. q_2 bei $x = x_1$ bzw. $x = x_2$!

2. Berechnen Sie

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta\,(x-3)\ (x^2-5)$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta\left(x^2-9\right)\ (x^2-5)$,

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta\left(x^4-16\right)\ (x^2-5)$, (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta\,(\cos(x))\ \frac{1}{x}$!

3. Berechnen Sie die erste Ableitung der Distribution $\Theta(x)\cos(x)$!
   ($\Theta(x) = 0$ für $x < 0$, $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$).

4. Wir betrachten die Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen

$$\Delta\Psi(x,y) = 0\,.$$

   (a) Welche gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $f(y)$ folgt aus dem Ansatz

$$\Psi(x,y) = \cos(k\,x)\,f(y) \qquad ?$$

   Geben Sie die allgemeine Lösung für die Funktion $f(y)$ an !

   (b) Machen Sie nun allgemeiner den Separationsansatz $\Psi(x,y) = X(x)\,Y(y)$. Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten Sie für die Funktionen $X(x)$ und $Y(y)$ aus der Laplace-Gleichung ? Welche beiden Fälle sind zu unterscheiden ?

   (c) Auf dem Quadrat $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ sind nun die Randbedingungen $\Psi\,(x = \pm\pi/2, y) = \cos(y)$, $\Psi\,(x, y = \pm\pi/2) = 0$ vorgegeben. Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $\Psi(x,y)$ der Laplace-Gleichung !

5. Gegeben sei ein kugelsymmetrisches Potential in drei Dimensionen

$$\Psi(\vec{r}) = a\,\mathrm{e}^{-\alpha r}\,.$$

   Berechnen Sie die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0\,\Delta\Psi$!

6. Geben Sie das Potential $\Psi(\vec{r})$ zu der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q_1\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_1) + q_2\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_2)$$

   an !

7. Wie müssen Sie α in $n(\vec{r},t) = N_0\, t^{-3/2}\, \mathrm{e}^{-\alpha(\vec{r}-\vec{r}_0)^2/t}$ wählen, um eine Lösung der dreidimensionalen Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t} = D\,\Delta n(\vec{r},t)$$

zu erhalten ?

8. Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t)\,. \qquad (\diamondsuit)$$

   (a) Rechnen Sie nach, daß $\Psi(x,t) = f(x-c\,t) + g(x+c\,t)$ die Gleichung $(\diamondsuit)$ löst !
   (b) Wir schränken uns nun auf $x \le 0$ ein und fordern die Randbedingung $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(0,t) = 0$. Was folgt hieraus für die Funktionen f, g aus Aufgabenteil (a) ?

9. Setzen Sie $\Psi_\pm(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{\pm i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ in die dreidimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(\vec{r},t) = c^2\,\Delta\Psi(\vec{r},t)$$

ein und diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen an den Betrag k des Wellenvektors und die Frequenz ω Sie eine Lösung erhalten !

10. Zeigen Sie:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^2}\,\cos((2l+1)\,x)$$

ist die Fourier-Reihe für die Funktion $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$!

11. Die schwingende Saite $y(x,t)$ mit $0 \le x \le L$ wird beschrieben durch die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

und die Randbedingungen $y(0,t) = 0 = y(L,t)$. Die Lösung kann als Fourier-Reihe angesetzt werden

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\,\sin(\pi k x/L)\,.$$

   (a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Koeffizienten $y_k(t)$? Geben Sie die allgemeinen Lösungen für $y_k(t)$ an !
   (b) Die Saite werde nun zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Mitte angezupft. Bestimmen Sie die Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(x,0) = 0\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = A\,\delta(x - L/2)\,,$$

   in der Darstellung als Fourier-Reihe !

12. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-ikx}\,f(x)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \le x \le 0, \\ 1-x & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases} \qquad !$$

Skizzieren Sie $f(x)$ und $\tilde{f}(k)$!