Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 9

Freiwillige Abgabe bis: Mittwoch, 7. Juli 2004, 13:00

Dieses Blatt beschäftigt sich mit der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) \, . \qquad (\diamondsuit)$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die allgemeine Lösung dieser Gleichung die Form

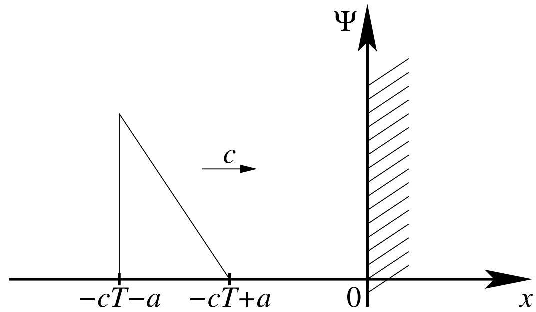
$$\Psi(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t) \qquad (\heartsuit)$$

besitzt, wobei f und g beliebige Funktionen sind.

1. Bestimmen Sie die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ($\diamondsuit$) zu den Anfangsbedingungen
$$\Psi(x,0) = 0 \, , \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = \alpha \, x \, \mathrm{e}^{-\beta \, x^2} \qquad !$$

2. Eine eindimensionale Welle wird an einer Wand bei $x = 0$ reflektiert, ausgedrückt durch die Randbedingung
$$\Psi(0,t) = 0 \, .$$
   (a) Welcher Zusammenhang folgt aus dieser Randbedingung für die Funktionen f und g in der allgemeinen Lösung ($\heartsuit$) der Wellengleichung ($\diamondsuit$) ?

   (b) Ein Wellenpaket werde wie in folgender Skizze zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x < 0$ so präpariert, daß es mit Geschwindigkeit $c > 0$ gegen die Wand bei $x = 0$ läuft:



Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $\Psi(x,T)$ (d.h. Ψ zum Zeitpunkt $t = T$) sowie $\Psi(x, 2\,T)$ (d.h. Ψ zum Zeitpunkt $t = 2\,T$) !

3. Die Lösungen $\Psi(x,t)$ der eindimensionalen Wellengleichung fallen im unendlichen ($x \to \pm\infty$) schneller als jede Potenz von x ab. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der eindimensionalen Wellengleichung ($\diamondsuit$):

   (a) $$V := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \Psi(x,t) \quad : \qquad \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}t^2} = 0\,,$$

   (b) $$\langle x \rangle := \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, x \, \Psi(x,t) \quad : \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \langle x \rangle}{\mathrm{d}t^2} = 0\,,$$

   (c) $$\langle x^2 \rangle := \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, x^2 \, \Psi(x,t) \quad : \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \langle x^2 \rangle}{\mathrm{d}t^2} = 2c^2 \qquad !$$

   Interpretieren Sie das Ergebnis von Aufgabenteil (c) !

4. Wir betrachten eine schwingende Saite, die bei $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Die Auslenkung $y(x,t)$ der Saite erfüllt die eindimensionale Wellengleichung

   $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$$

   mit den Randbedingungen

   $$y(0,t) = y(L,t) = 0\,.$$

   Konstruieren Sie aus den harmonischen Wellen

   $$\cos(k\,x - \omega t)\,, \quad \sin(k\,x - \omega t)\,, \quad \cos(k\,x + \omega t)\,, \quad \sin(k\,x + \omega t)$$

   eine Lösung dieses Problems ! Welche Bedingungen ergeben sich für den Wellenvektor $k = \omega/c$?
   Anleitung: Konstruieren Sie zuerst eine Lösung, die die Randbedingung $y(0,t) = 0$ erfüllt. Unter welchen Bedingungen können Sie anschließend auch $y(L,t) = 0$ erfüllen ?