Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 8

Freiwillige Abgabe bis: Mittwoch, 30. Juni 2004, 13:00

1. Bestimmen Sie das Potential $\Psi(\vec{r})$ zu der kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

$$\rho(r) = -\frac{b}{r}\,\mathrm{e}^{-\alpha r} \qquad !$$

2. Minimalflächen $\Psi(x,y)$ erfüllen die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Psi = 0\,.$$

Dies gilt z.B. für Seifenblasen und Stoffe, die über einen Rahmen gespannt werden. Ein Architekt gebe zur Überdachung des Quadrats

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

mit Hilfe von Bögen am Rande die Höhe

$$\Psi\left(x = \pm\frac{\pi}{2}, y\right) = \cos(y)\,, \qquad \Psi\left(x, y = \pm\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

vor. Berechnen Sie, wie das mit Stoff bespannte Dach aussieht !
Anleitung: Setzen Sie

$$\Psi(x,y) = \cos(x)\,f(y) + \cos(y)\,g(x)$$

an. Welche Randbedingungen erhalten Sie für die Funktionen $f(y)$ und $g(x)$ bei $y = \pm\frac{\pi}{2}$ bzw. $x = \pm\frac{\pi}{2}$ aus den für $\Psi(x,y)$ geforderten Dirichlet'schen Randbedingungen ? Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen folgen für die Funktionen f und g aus der Laplace-Gleichung ? Lösen Sie diese gewöhnlichen Differentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen !

3. Prüfen Sie durch Einsetzen, daß

$$n_0(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$$

die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$$

löst !

4. Wir betrachten die eindimensionale Diffusionsgleichung mit der Anfangsbedingung

$$n(x,0) = \rho(x) = \frac{N}{2}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right) .$$

Berechnen Sie mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0 \, \rho(x_0) \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$$

die zugehörige Lösung !
Überzeugen Sie sich, daß das Ergebnis tatsächlich die Diffusionsgleichung zu den gewünschten Anfangsbedingungen löst !