Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 7

Freiwillige Abgabe bis: Mittwoch, 23. Juni 2004, 13:00

1. Wir betrachten die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Psi = 0\,.$$

   (a) Unter welchen Bedingungen an die Konstanten A, B, C, D, E und F in dem Ansatz

$$\Psi(x, y, z) = A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,xy + E\,xz + F\,yz$$

   erhalten Sie eine Lösung der Laplace-Gleichung ?

   (b) Wir betrachten nun den Ansatz

$$\Psi(x, y, z) = \bar{A}\,x^3 + \bar{B}\,x^2y + \bar{C}\,xy^2 + \bar{D}\,y^3\,.$$

   Unter welchen Bedingungen an die Konstanten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ und $\bar{D}$ löst dieser Ansatz die Laplace-Gleichung ?

   (c) Ein weiterer Ansatz ist

$$\Psi(x, y, z) = \mathrm{e}^{\alpha x}\, f(y)\,.$$

   Welche gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $f(y)$ folgt mit diesem Ansatz aus der Laplace-Gleichung ? Geben Sie die allgemeine Lösung für die Funktion $f(y)$ an !

2. Wir betrachten den Laplace-Operator in zwei Dimensionen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

   Zeigen Sie:

$$\Delta\,(\ln r) = 2\pi\,\delta^{(2)}\,(\vec{r}) \qquad !$$

   Hinweise:

   - Folgen Sie der Argumentationsweise der Vorlesung für den dreidimensionalen Fall.

- Der Gradient und der Laplace-Operator lauten in Polarkoordinaten r, φ

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} A &= \frac{\partial A}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi\,,\\ \Delta A &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}\,.\end{aligned}$$

- Machen Sie sich klar, daß der Gauß'sche Integralsatz in zwei Dimensionen in der Form

$$\int_{\mathcal{A}} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}A = \oint_{\mathcal{C}(\mathcal{A})} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{N}$$

  gilt. Hierbei ist $\mathcal{A}$ ein Fläche mit Rand $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ und $\vec{N}$ der Einheitsnormalenvektor auf diesem Rand.

3. Gegeben sei ein kugelsymmetrisches Potential

$$\Psi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,R} & \text{für } r < R,\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r} & \text{für } r > R.\end{cases}$$

Berechnen Sie die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$!