Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 6

Freiwillige Abgabe bis: Mittwoch, 16. Juni 2004, 13:00

1. Eine Kugel mit Radius R um den Ursprung habe die Gesamtmasse m und eine konstante Massendichte $\mu(\vec{r})$ innerhalb der Kugel. Verwenden Sie die Heavyside-Funktion
$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$
um die Massenverteilung $\mu(r, \vartheta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten anzugeben !

2. Wir betrachten die Folge von Funktionen
$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} .$$
   (a) Skizzieren Sie die Funktion $g_\varepsilon(x)$!
   (b) Zeigen Sie:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, g_\varepsilon(x) = 1 \qquad !$$
   (c) Begründen Sie, daß
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, g_\varepsilon(x - x_0) \, f(x) \quad \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \quad f(x_0)$$
   für hinreichend glatte (stetige) $f(x)$, d.h. $\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x) = \delta(x)$!

3. Drücken Sie folgende Ladungsdichte $\rho(x)$ in einer Dimension mit Hilfe der δ-Distribution aus: Punkt-Ladungen mit Ladung $-q$, $2q$ und $-q$ bei $x = -a$, 0 und a !

4. Wir betrachten zwei Dimensionen und einen Kreis mit Radius R um den Ursprung, der homogen mit einer Gesamtladung q geladen ist. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(r, \varphi)$ in Polarkoordinaten mit Hilfe der δ-Distribution an !

5. Bestimmen Sie
   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta\,(x - 2)\; x^3 - 2x + 5,$
   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\cos(x)}{1 + x^2},$
   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(x)}{1 + x^2},$
   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta\left(x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \frac{\sin(x)}{x}$!

6. Berechnen Sie $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^2 \, |x|}{\mathrm{d}x^2}$!

Distributionen:

Mathematische Sichtweise

- Die unendlich oft differenzierbaren Funktionen f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger bilden einen Vektorraum $\mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, d.h. insbesondere ist für $f, g \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ auch $af + bg \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ und hat die üblichen Eigenschaften.

- **Definition:** Eine Distribution $\mathcal{T}$ im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige lineare Abbildung

$$\mathcal{T}: \quad \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}\,, \qquad\qquad f \mapsto \mathcal{T}[f]\,.$$

- Für eine stetige Funktion g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert

$$\mathcal{T}_g[f] := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\, g(\vec{x}) f(\vec{x}) \tag{1}$$

  eine Distribution.
  Physiker bezeichnen die Funktion g selbst als Distribution.

- **Definition:** Die Distribution

$$\delta^{(n)}_{\vec{x}_0}[f] := f(\vec{x}_0)$$

  heißt n-dimensionale δ-Distribution.
  In der Physik schreibt man

$$\delta^{(n)}_{\vec{x}_0}[f] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\, \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}_0) f(\vec{x})$$

  und bezeichnet $\delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}_0)$ als n-dimensionale δ-Distribution.

- **Definition:** Eine Folge $\mathcal{T}_\varepsilon$ von Distributionen konvergiert gegen die Distribution $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T}_\varepsilon[f] \to \mathcal{T}[f]$ für alle $f \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$.
  Für den Physiker bedeutet dies, daß Konvergenz unter dem Integral nachzuprüfen ist.

- Die Ableitung $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i}$ einer Distribution definiert man über

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i}[f] = -\mathcal{T}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]\,,$$

  d.h. man fordert die Gültigkeit partieller Integration in der Darstellung (1).