Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 4

Abgabe bitte bis: Mittwoch, 19. Mai 2004, 13:00

1. Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} xz \\ yz^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und einen Würfel mit $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$!

2. Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ und eine Kugel um den Ursprung mit Radius R !
   Hinweise: $\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \, \sin^3\vartheta = \frac{4}{3}$, $\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \, \sin\vartheta \, \cos^2\vartheta = \frac{2}{3}$.

3. Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \sin\vartheta \, \vec{e}_\vartheta$.
   (a) Begründen Sie, warum der Fluß des Vektorfeldes durch eine Kugelschale um den Ursprung mit Radius R verschwindet !
   (b) Bestätigen Sie diese Aussage mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß !

4. Verifizieren Sie den Stokes'schen Integralsatz für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

   und die Flächen $\vec{r}_I(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_{II}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$!
   Hinweis: $\int_0^1 \mathrm{d}r \left(\frac{r^3}{(1+r^2)^2} - \frac{r}{1+r^2} \right) = -\frac{1}{4}$.

5. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ \lambda z \end{pmatrix}$. Verifizieren Sie für dieses Feld
   (a) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für die Integration über einen Zylinder mit Radius R und Höhe H, der um die z-Achse zentriert ist ($0 \leq z \leq H$),
   (b) die Gültigkeit des Stokes'schen Satzes für die Integration über eine Kreisscheibe mit Radius R um die z-Achse bei $z = h$!