Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

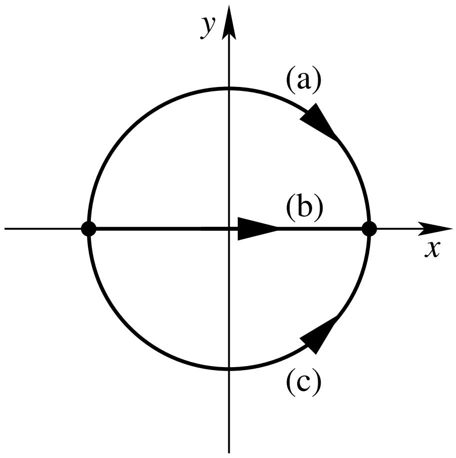
Übungsblatt 3

Abgabe bitte bis: Mittwoch, 12. Mai 2004, 13:00

1. Berechnen Sie die Arbeit des Kraftfeldes

$$\vec{F} = \frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

beim Verschieben einer Masse von $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entlang der drei folgenden Wege:



Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Arbeit vom Weg !

2. Setzen Sie eine Parametrisierung in

$$\int \vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$$

ein und zeigen Sie, daß das Linienintegral unabhängig vom Weg ist ! Geben Sie dann ein Potential $\psi(\vec{r})$ des Vektorfeldes $\vec{r}$ an !

3. Wir betrachten Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und wählen als Parameter $u = \varphi$, $v = \vartheta$.

(a) Bestimmen Sie die Tangentenvektoren $\vec{t}_u$ und $\vec{t}_v$! Zeigen Sie: $\vec{t}_u \cdot \vec{t}_v = 0$! Skizzieren Sie die Linien konstanten u, v sowie die zugehörigen Tangentenvektoren !

(b) Verifizieren Sie $\mathrm{d}A = \left\| \vec{t}_u \times \vec{t}_v \right\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta$!

(c) Überzeugen Sie sich, daß das Integral über die Kugeloberfläche das erwartete Ergebnis liefert:

$$\int_{\|\vec{r}\|=R} \mathrm{d}A = 4\pi R^2 \qquad !$$

4. Ein radialsymmetrisches Vektorfeld $\vec{F}\,(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r$ mit einer Funktion $f(r)$ des Radius r durchflute eine Kugelschale vom Radius R. Bestimmen Sie den Fluß durch diese Kugelschale

$$\Phi = \int_{\|\vec{r}\|=R} \vec{F}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad !$$

5. Berechnen Sie den Fluß Φ eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes $\vec{F}\,(\vec{r}) = f(\rho)\,\vec{e}_\rho$ durch die geschlossene Oberfläche $\mathcal{A}$ eines Zylinders mit Radius R und Höhe H um die z-Achse !