Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 2

Abgabe bitte bis: Mittwoch, 5. Mai 2004, 13:00

1. Zeigen Sie, daß der Laplace-Operator angewandt auf ein Skalarfeld A in Kugelkoordinaten die folgende Form hat:

$$\Delta A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\right) \qquad !$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 1.8(c) und 1.8(d).

2. Berechnen Sie
   (a) $\Delta\,(1/r)$ in drei Dimensionen ($r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$),
   (b) $\Delta\,(\ln r)$ in zwei Dimensionen ($r = \sqrt{x^2+y^2}$) !
   Diskutieren Sie in beiden Fällen das Verhalten bei $r = 0$!

3. Zeigen Sie:
   (a) Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}$ ist quellenfrei: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$,
   (b) der Gradient eines Skalarfeldes A ist wirbelfrei: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}A\right) = 0$!

4. Zeigen Sie, daß das Vektorfeld

$$\vec{A}\,(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yz - \sin(x-y) \\ xz + \sin(x-y) + \cos\left(z^2+y\right) \\ xy + 2z\cos\left(z^2+y\right) \end{pmatrix}$$

   wirbelfrei ist !

5. Die Quellen des Vektorfeldes $\vec{A}\times\vec{B}$ sind durch die Wirbel der Felder $\vec{A}$ und $\vec{B}$ bestimmt. Wie ?

6. Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F}\,(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})$ mit $\vec{\omega} = \text{const.}$ Wählen Sie die z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems in Richtung $\vec{\omega}$ und geben Sie das Feld in kartesischen Koordinaten an ! Skizzieren Sie das Feld in der Ebene $z = 0$! Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des Feldes !

7. Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{A} = \left(\vec{B}\times\vec{\nabla}C\right)$! Wo sind die Quellen des Feldes $\vec{A}$?