Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 11

1. Wir betrachten die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Die Lösung kann als Fourier-Reihe angesetzt werden

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k(t)\, \mathrm{e}^{ikx} .$$

(a) Welche gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Koeffizienten $n_k(t)$? Geben Sie die Lösungen für $n_k(t)$ an !

(b) Gegeben seien die Anfangsbedingungen

$$n(x,0) = \begin{cases} A & \text{für } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases} .$$

Geben Sie die zugehörige Lösung $n(x,t)$ der eindimensionalen Diffusionsgleichung als Fourier-Reihe an !

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 10.4.

2. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ikx}\, f(x)$$

der Kastenfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a < x < a, \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases} \qquad !$$

Skizzieren Sie $f(x)$ und $\tilde{f}(k)$!

3. Die Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t)$$

können als Fourier-Integral dargestellt werden:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{\Psi}(k,t)\, \mathrm{e}^{ikx}\,.$$

(a) Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt $\tilde{\Psi}(k,t)$ für festes k ? Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an !

(b) Gegeben seien die Anfangsbedingungen

$$\Psi(x,0) = \Psi_0\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2/2}\,, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

Geben Sie die zugehörige Lösung $\Psi(x,t)$ der eindimensionalen Wellengleichung als Fourier-Integral an !

Erinnerung: 2. „Klausur": 23.07.2004, 08:00–09:30 in MS 3.1

- Teilnahme an „Klausur" ist Voraussetzung für einen Teilnahmeschein
- Sie brauchen keine Hilfsmittel !