Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 10

Freiwillige Abgabe bis: Mittwoch, 14. Juli 2004, 13:00

1. Zeigen Sie:
$$\Psi(\vec{r},t) = A\,\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + B\,\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$
löst die dreidimensionale Wellengleichung
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(\vec{r},t) = c^2\,\Delta\Psi(\vec{r},t) \qquad !$$
Welche Beziehung ergibt sich zwischen dem Betrag des Wellenvektors k und der Frequenz ω ?

2. Die Auslenkung $y(x,t)$ eines Seils genügt der eindimensionalen Wellengleichung
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = c^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\,.$$
Das Seil sei bei $x = 0$ festgeknotet und werde bei $x = L$ mit der Frequenz ω angetrieben:
$$y(0,t) = 0\,, \qquad y(L,t) = A\,\sin(\omega t)\,.$$
   (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes
   $$y(x,t) = X(x)\,T(t)$$
   eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung, die den geforderten Randbedingungen genügt !

   (b) Betrachten Sie nun die Knoten, d.h. die Stellen des Seiles, die sich nicht bewegen ($0 < x_0 < L$ ist Knoten, wenn $y(x_0,t) = 0$ für alle t). Wie müssen Sie die Antriebsfrequenz ω wählen, damit Sie mindestens einen Knoten erhalten ?

3. Zeigen Sie:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\,\sin(k\,x)\,\sin(k'\,x) \;=\; \pi\,\delta_{k,k'}\,,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\,\cos(k\,x)\,\cos(k'\,x) \;=\; \pi\,\delta_{k,k'}\,(1+\delta_{k,0})\,,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\,\sin(k\,x)\,\cos(k'\,x) \;=\; 0$$

für $k, k' \in \mathbb{N}_0$ $(k, k' = 0, 1, 2, \ldots)$!
Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{i\,(k-k'\,)x} \;=\; 2\pi\,\delta_{k,k'}$$

für $k, k' \in \mathbb{Z}$.

4. Gegeben sei die Reihe

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1}\,\sin((2l+1)\,x)\,.$$

   (a) Zeigen Sie: $F(x)$ ist die Fourier-Reihe auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ zu der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases} \qquad !$$

   (b) Berechnen Sie $F(\pi/2)$ und $F(-\pi/2)$!
   Hinweis:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$