Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Physikalische Rechenmethoden II

Übungsblatt 1

Abgabe bitte bis: Mittwoch, 28. April 2004, 13:00

1. Berechnen Sie den Gradienten von A sowie den Betrag des Gradienten im jeweiligen Punkt P:

   (a) $A(x,y,z) = 8x^2y^3 - 4xyz^2$ im Punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$!

   (b) $A(x,y,z) = x^2 \exp y + 2yz^3$ im Punkt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$!

   (c) $A(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ im Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$!

2. Berechnen Sie die dreidimensionalen Gradienten der skalaren Felder $A = \ln r$, $B = x^2yz + x \exp y$, $C = y \exp x$ und $D = x \sin(yz)$!

3. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $A(x,y,z) = xyz + 3yz^3$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im Raumpunkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$!

4. Berechnen Sie den Gradienten des skalaren Feldes

$$A(r, \vartheta, \varphi) = r \cos\vartheta \qquad !$$

5. Wo verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2y - 4x \\ x^2y \end{pmatrix} \qquad ?$$

6. Bestimmen Sie die Divergenz der folgenden Vektorfelder:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 2zx \end{pmatrix}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 4x^2 + 8xy + z \\ 4x^2 + y \\ xz + yz + z^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{C}(\vec{r}) = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}, \qquad \vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{r}\,\vec{e}_r + \frac{\vartheta}{\sin\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta \qquad !$$

7. Skizzieren und diskutieren Sie ein skalares Feld der Form $A(\vec{r}) = 1 + \vec{a} \cdot \vec{r}$ mit $\vec{a} =$ const. !

8. In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$.
Zeigen Sie:
(a)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

(b) Für ein Vektorfeld $\vec{A}$ gilt:

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \sin\vartheta\cos\varphi + A_y \sin\vartheta\sin\varphi + A_z\cos\vartheta \\ A_\varphi &= -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \\ A_\vartheta &= A_x\cos\vartheta\cos\varphi + A_y\cos\vartheta\sin\varphi - A_z\sin\vartheta \end{aligned}$$

sowie die Umkehrung:

$$\begin{aligned} A_x &= A_r\sin\vartheta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi + A_\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \\ A_y &= A_r\sin\vartheta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi + A_\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \\ A_z &= A_r\cos\vartheta - A_\vartheta\sin\vartheta \end{aligned}$$

(c) Für ein Skalarfeld A gilt:

$$\vec{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial A}{\partial\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta$$

(d) Für ein Vektorfeld $\vec{A}$ gilt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial\left(\sin\vartheta A_\vartheta\right)}{\partial\vartheta}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe in der Form

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\,\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,,$$

sowie $\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\vec{e}_r = \sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi$, $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,\vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$, etc., und daß $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\vartheta$ orthonormal sind.