Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Kritische Exponenten aus der ϵ-Entwicklung

Entwicklung bis zur 5. Ordnung in ϵ liefert für die kritischen Exponenten des Ising-Modells in $D = 4 - \epsilon$ (Daten entnommen aus [1]):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\nu} = {} & 2 - \frac{\epsilon}{3} - \frac{19\epsilon^2}{162} - \epsilon^3 \left(\frac{937}{17496} - \frac{4\zeta(3)}{27} \right) - \epsilon^4 \left(\frac{24857}{1889568} - \frac{\pi^4}{810} - \frac{119\zeta(3)}{1458} + \frac{40\zeta(5)}{81} \right) \\
& - \epsilon^5 \left(\frac{64327}{204073344} - \frac{119\pi^4}{174960} + \frac{10\pi^6}{15309} - \frac{3335\zeta(3)}{52488} + \frac{8\zeta(3)^2}{81} + \frac{176\zeta(5)}{729} - \frac{49\zeta(7)}{27} \right) \\
& + \mathcal{O}(\epsilon^6)\,, \\
\eta = {} & \frac{\epsilon^2}{54} + \frac{109\epsilon^3}{5832} + \epsilon^4 \left(\frac{7217}{629856} - \frac{4\zeta(3)}{243} \right) + \epsilon^5 \left(\frac{321511}{68024448} - \frac{\pi^4}{7290} - \frac{329\zeta(3)}{17496} + \frac{40\zeta(5)}{729} \right) \\
& + \mathcal{O}(\epsilon^6)\,.
\end{aligned}
$$

mit den Werten der Riemannschen ζ-Funktion

$$\zeta(3) \approx 1.20206\,, \qquad \zeta(5) \approx 1.03693\,, \qquad \zeta(7) \approx 1.00835\,.$$

Man sieht leicht, daß die Koeffizienten mit der Ordnung wachsen. Diese Reihen sind also nicht konvergent. Trotzdem lassen sie sich mit geeigneten Techniken resummieren [2]. Man findet dann die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte:

	3D Ising-Modell		2D Ising-Modell	
Exponent	ϵ-Entwicklung [2]	Numerisch [3]	ϵ-Entwicklung [2]	Exakte Lösung [4]
β	0.3270(15)	0.3267(10)	0.120(15)	0.125
η	0.0375(25)	0.037(3)	0.26(5)	0.25
ν	0.6310(15)	0.6301(8)	0.99(4)	1
γ	1.2390(25)	1.237(2)	1.73(6)	1.75

[1] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Exact Five-Loop Renormalization Group Functions of ϕ^4-Theory with $O(N)$-Symmetric and Cubic Interactions. Critical Exponents up to ϵ^5*, Phys. Lett. **B342** (1995) 284-296

[2] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Third Edition, Claredon Press, Oxford (1996)

[3] H.W.J. Blöte, E. Luijten, J.R. Heringa, *Ising Universality in Three Dimensions: A Monte Carlo Study*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 6289-6313

[4] L. Onsager, *Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition*, Physical Review **65** (1944) 117-149