Hubbard-Modell

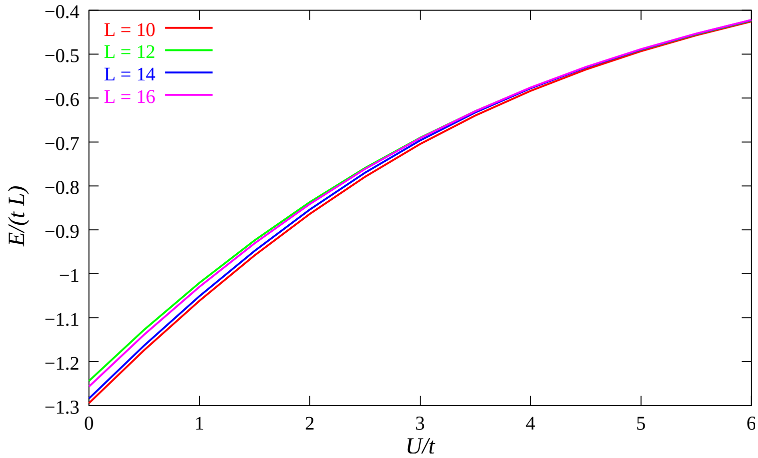
Zweitquantisierte Elektron-Operatoren $c_{x,\sigma}^{(\dagger)}$ mit Spin-1/2 ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) erfüllen die folgenden Antikommutatoren:

$$\{c_{x,\sigma}, c_{y,\sigma'}\} = 0$$
$$\left\{c_{x,\sigma}^\dagger, c_{y,\sigma'}^\dagger\right\} = 0$$
$$\left\{c_{x,\sigma}^\dagger, c_{y,\sigma'}\right\} = \delta_{x,y}\,\delta_{\sigma,\sigma'}$$

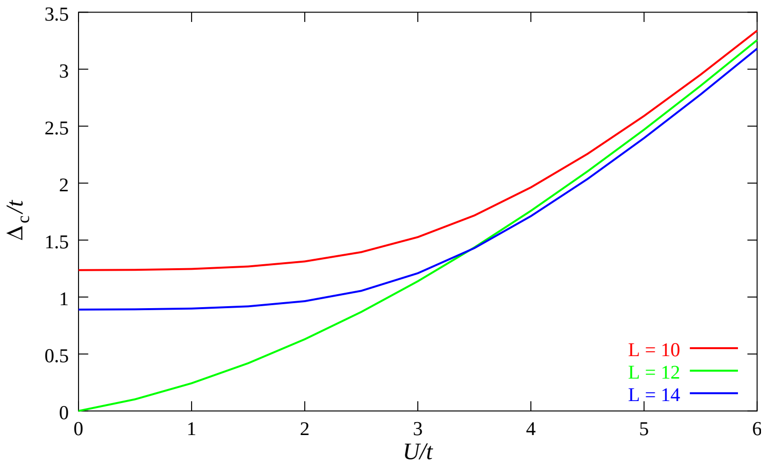
Damit ist der Hamilton-Operator einer eindimensionalen Hubbard-Kette

$$H = -t \sum_{x=1}^{L} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left(c_{x,\sigma}^\dagger c_{x+1,\sigma} + c_{x+1,\sigma}^\dagger c_{x,\sigma} \right) + U \sum_{x=1}^{L} c_{x,\uparrow}^\dagger c_{x,\uparrow} c_{x,\downarrow}^\dagger c_{x,\downarrow} \,.$$

Grundzustandsenergie pro Platz der 1D Hubbard-Kette bei halber Füllung



Ladungslücke der 1D Hubbard-Kette bei halber Füllung



Übungsaufgabe:

Sei

$$S_x^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{r,s=\uparrow,\downarrow} c_{x,r}^\dagger \sigma_{r,s}^\alpha c_{x,s}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^α.

Zeigen Sie:

1. $\left[S_x^\alpha, S_x^\beta\right] = i \sum_\gamma \epsilon_\gamma^{\alpha,\beta} S_x^\gamma$ (verwenden Sie $\left[\sigma^\alpha, \sigma^\beta\right] = i \sum_\gamma 2\epsilon_\gamma^{\alpha,\beta} \sigma^\gamma$).
2. $\left[S_x^\alpha + S_y^\alpha, c_{x,\sigma}^\dagger c_{y,\sigma}\right] = 0$.
3. $\left[S_x^\alpha, c_{x,\uparrow}^\dagger c_{x,\uparrow} c_{x,\downarrow}^\dagger c_{x,\downarrow}\right] = 0$.

Bemerkung:
Hiermit haben Sie gezeigt, daß das Hubbard-Modell eine globale $SU(2)$-Symmetrie besitzt.