Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
Institut für Theoretische Physik
Dr. Andreas Honecker

Die Lie-Algebra $SU(N)$

Die Lie-Algebra $SU(N)$ ist eine Unteralgebra der komplexen $N \times N$ Matrizen und besitzt eine Basis von $N^2 - 1$ Generatoren J_a mit folgenden Eigenschaften:

1. $J_a = J_a^\dagger$ (hermitesch),
2. $\mathrm{Spur} J_a = 0$.

$SU(3)$

Eine Basis für die Lie-Algebra $SU(3)$ ist durch die folgenden 8 *Gell-Mann*-Matrizen gegeben:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Man prüft nach, daß

1. $\mathrm{Spur}\,(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$,
2. $\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{ab}^c \frac{\lambda_c}{2}$ mit f_{ab}^c total antisymmetrisch.

Die Ersetzung $\lambda_a/2 \to F_a$ definiert die abstrakte Lie-Algebra $SU(3)$, deren Vertauschungsrelationen gegeben sind durch

$$[F_a, F_b] = i f_{ab}^c F_c\,.$$