Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Wichtige Ergebnisse der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra

Die *Kac-Determinante* ist gegeben durch

$$\det_n(c,h) = K \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N}\\ 1\le rs\le n}} \left(h - h_{r,s}(c)\right)^{P(n-rs)}$$

mit

-
$$K = \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N}\\ 1\le rs\le n}} \left((2r)^s s!\right)^{m(r,s)} > 0\,,$$
wobei die explizite Form der Konstante nur in der Basis $L_{-n_s}\dots L_{-n_1}|h\rangle$ mit $n_s \ge \dots \ge n_1 > 0$ gilt, Positivität jedoch in jeder Basis,
-
$$m(r,s) = P(n-rs) - P\left(n - r(s+1)\right)$$
-
$$h_{r,s}(c) = \frac{1}{48}\left[(13-c)(r^2+s^2) + \sqrt{(c-1)(c-25)}(r^2-s^2) - 24rs - 2 + 2c\right]$$
- $P(k)$ ist die Anzahl der Zerlegungen (Partitionen) von k als Summe positiver ganzer Zahlen ($P(0) := 1$, $P(-n) := 0$ für $n > 0$).

Unitäre minimale Modelle: Für $0 \le c < 1$ setze

$$c(m) = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)}\,,$$
$$h_{r,s}(m) = \frac{\left((m+3)r - (m+2)s\right)^2 - 1}{4(m+2)(m+3)}\,.$$

Satz: Die Darstellung der Virasoro-Algebra in $V_{c,h}$ ist unitär für $c < 1$ genau dann, wenn $c = c(m)$, $h = h_{r,s}(m)$ mit $1 \le m, r, s, \in \mathbb{N}$ und $1 \le s \le r \le m+1$.

Allgemeine minimale Modelle:[1] Existenz nicht-trivialer Nullzustände im Vakuum-Modul ($h=0$):

$$c_{p,q} = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq} ,$$
$$h_{r,s} = \frac{(ps-qr)^2-(p-q)^2}{4pq} ,$$

mit

- p, $q > 1$ teilerfremde ganze Zahlen,
- $1 \le r \le p-1$, $1 \le s \le q-1$. Dies ist eine Bedingung, daß der Nullvektor aus $V_{c_{p,q},0}$ auch in $V_{c_{p,q},h_{r,s}}$ erhalten bleibt.

Die unitären minimalen Modelle sind der Spezialfall $p=m+2$, $q=m+3$ der allgemeinen minimalen Modelle (beachte: $c_{2,3} = c(0) = 0$).

Beispiele:

1. Ising-Modell $p=3$, $q=4$: $c=\frac{1}{2}$.

$\downarrow s \quad r \rightarrow$	1	2
1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
2	$\frac{1}{16}$	$\mathbf{\frac{1}{16}}$
3	$\frac{1}{2}$	0

2. Trikritisches Ising-Modell $p=4$, $q=5$: $c=\frac{7}{10}$.

$\downarrow s \quad r \rightarrow$	1	2	3
1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{7}{16}}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$
2	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{3}{80}}$	$\mathbf{\frac{3}{5}}$
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{80}$	$\mathbf{\frac{1}{10}}$
4	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{16}$	0

[1] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333-380