Der Homomorphismus $SU(2) \to SO(3)$

Damit Spin-Bahn- (L-S-) Koppelung sinnvoll ist, und die Definition der Clebsch-Gordan-Koeffizienten hierbei eingesetzt werden kann, muß es möglich sein, jede Darstellung von $SO(3)$ auch als Darstellung von $SU(2)$ aufzufassen. Dies ist aufgrund des im folgenden vorgestellten Homomorphismus von $SU(2)$ nach $SO(3)$ möglich.

Die Gruppe der unitären Transformationen in zwei Dimensionen ist gegeben durch

$$SU(2) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{array} \right) \middle| \, z_1, z_2 \in \mathbb{C},\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\} .$$

Wir bemerken nun, daß die Menge der spurlosen, hermiteschen 2×2 Matrizen isomorph ist zum $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 \cong E = \left\{ X = \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{array} \right) \middle| \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Die Norm ist in dieser Darstellung gegeben durch $-\det X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ♣. Wir betrachten nun die folgende Darstellung P von $SU(2)$ in E

$$P(A)X = AXA^{-1} ,$$

wobei $A \in SU(2)$ und $X \in E$ ist. Dies ist eine Darstellung, denn $P(A)X \in E$, wie man leicht anhand der beiden Identitäten $\mathrm{Spur}(AXA^{-1}) = \mathrm{Spur}(A^{-1}AX) = \mathrm{Spur}(X)$ und $(AXA^{-1})^\dagger = (A^{-1})^\dagger X^\dagger A^\dagger = AXA^{-1}$ sieht.

Die Darstellung P ist orthogonal, denn aus der Identität $\det(P(A)X) = \det(AXA^{-1}) = \det(X)$ folgt, daß $|\det(P(A))| = 1$, d.h. $\det(P(A)) = \pm 1$. Nun ist aber $SU(2)$ zusammenhängend und die Abbildung $A \mapsto P(A)$ stetig, also muß $\det(P(A)) = 1$ für alle $A \in SU(2)$ sein.

Wir haben also gezeigt, daß P ein Homomorphismus von $SU(2)$ auf $SO(3)$ ist. Offensichtlich gilt $P(-\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Genauer gilt der folgende Satz:

Satz: P: $SU(2) \to SO(3)$ ist surjektiv und $\mathrm{Kern}(P) = \{P^{-1}(\mathbb{1})\} = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

Auf den Beweis sei hier verzichtet – er kann unter anderem in Kapitel 7.2 von E.B. Vinberg, *Linear Representations of Groups*, Birkhäuser, Basel (1989) nachgelesen werden.

Korollar: $SO(3) \cong SU(2)/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

Daraus folgt, daß die irreduziblen Darstellungen von $SO(3)$ genau zu denjenigen irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ korrespondieren, deren Kern die $-\mathbb{1}$ enthält. Nun gilt aber für die irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$: $T^S(-\mathbb{1}) = (-1)^{2S}\mathbb{1}$ (dies ist zumindest für $S = \frac{1}{2}$ klar). Folglich kann S eine halb-ganze Zahl sein für Darstellungen von $SU(2)$ (Spin), während der Bahn-Drehimpuls, der durch Darstellungen von $SO(3)$ gegeben ist, *ganzzahlig* sein muß.

♣ Man beachte, daß man aus jeder Norm ein Skalarprodukt konstruieren kann. Dazu verwendet man *Polarisierung*, d.h. man löst die Identität $\langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle + 2\langle x|y\rangle$ nach $\langle x|y\rangle$ auf.