Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Einige wichtige Formeln der Operator-Produkt-Entwicklung (OPE)

Die *Operator-Produkt-Entwicklung* zweier bosonischer Felder ϕ_i, ϕ_j ist gegeben durch

$$\phi_i(z) \circ \phi_j(w) = \sum_k \frac{C_{ij}^k}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k}} \phi_k(w)$$

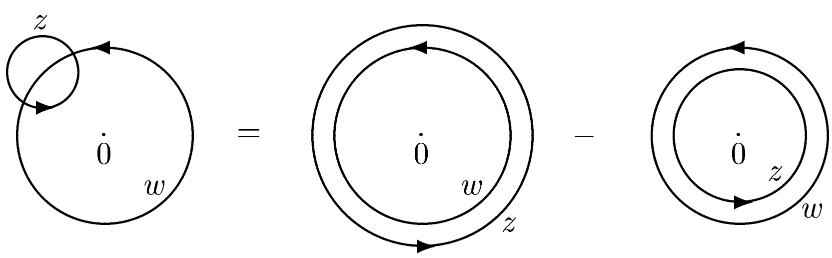
mit

$$\phi_i(z) \circ \phi_j(w) = \begin{cases} \phi_i(z)\phi_j(w) & \text{für } |z| > |w| \\ \phi_j(w)\phi_i(z) & \text{für } |z| < |w| . \end{cases}$$

Deren *singulärer* Teil wird bezeichnet mit:

$$\phi_i(\underbrace{z) \circ \phi_j(}w) = \sum_{h_k < h_i + h_j} \frac{C_{ij}^k}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k}} \phi_k(w) \,.$$

Eine allgemein nützliche *Kontur-Integral-Identität* ist im folgenden angedeutet:



Die *OPE-Form der Virasoro-Algebra* $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n$ ist

$$T(\underbrace{z) \circ T(}w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \,.$$

Der konstante Term der OPE von ϕ_1 mit ϕ_2 definiert das normalgeordnetes Produkt $(\phi_1\,\phi_2)(w)$ – in Formeln

$$(\phi_1\,\phi_2)(w) = \oint_w \frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} \, \frac{1}{(z-w)} \phi_1(z) \circ \phi_2(w) \,.$$

Für die *Moden* findet man

$$(\phi_1\,\phi_2)_n = \sum_{j\geq h_{\phi_1}} \phi_{1,-j}\phi_{2,n+j} + \sum_{j<h_{\phi_1}} \phi_{2,n+j}\phi_{1,-j}\,.$$

Zum Berechnen der OPE mit normalgeordneten Feldern ist die *Wick-Regel* nützlich:

$$\phi_1(z)\circ(\phi_2\,\phi_3)(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{\mathrm{d}x}{x-w}\Big\{\{\phi_1(z)\circ\phi_2(x)\}\circ\phi_3(w) + \phi_2(x)\circ\{\phi_1(z)\circ\phi_3(w)\}\Big\}\,.$$

Das *freie Fermion* erfüllt die OPE

$$\psi(z)\circ\psi(w) = \frac{1}{(z-w)}\,.$$

Der zugehörige Energie-Impuls-Tensor lautet

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\psi\,\partial\psi)\,.$$

Man kann nun folgende OPEs nachrechnen:

$$\begin{aligned} T(z)\circ\psi(w) &= \frac{\frac{1}{2}\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\psi(w)}{(z-w)}\,,\\ T(z)\circ T(w) &= \frac{1}{4(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}\,. \end{aligned}$$

Übungsaufgaben:

- Rekonstruiere den Kommutator $[L_m,\psi_n]$!
- Wie lautet $T(z)\circ\phi(w)$ für ein allgemeines *primäres* Feld $\phi(w)$ der konformen Dimension h_ϕ ?