Technische Universität
Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

Institut für Theoretische Physik

Dr. Andreas Honecker

Das freie Boson

OPE

Das freie Boson ϕ hat die OPE

$$\phi(z) \circ \phi(w) = \ln(z-w)\,,$$

d.h. formal gilt $h_\phi = 0$. Durch zweimaliges Differenzieren folgt, daß

$$J(z) = \partial\phi(z)$$

die OPE

$$J(z) \circ J(w) = \frac{1}{(z-w)^2}$$

erfüllt. Durch Modenentwicklung

$$J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n$$

findet man die *Heisenberg-Algebra*

$$[J_n, J_m] = n\delta_{n+m,0}\,. \tag{1}$$

Mit

$$T_0 := \frac{1}{2}(J\,J)$$

findet man die folgenden OPEs:

$$T_0(z) \circ J(w) = \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{(z-w)}\,,$$

$$T_0(z) \circ T_0(w) = \frac{1}{2(z-w)^4} + \frac{2T_0(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_0(w)}{(z-w)}\,,$$

insbesondere also die OPE-Form der Virasoro-Algebra bei $c = 1$!

Mit

$$T_\lambda := T_0 + i\lambda\{\partial J + J\} \tag{2}$$

findet man dann unter Verwendung des Distributiv-Gesetzes

$$T_\lambda(z) \circ T_\lambda(w) = \frac{1+12\lambda^2}{2(z-w)^4} + \frac{2T_\lambda(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_\lambda(w)}{(z-w)} - \frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}\,.$$

Bis auf den Term $-\lambda^2(z-w)^{-2}$ (der in L_0 absorbiert werden kann - siehe unten) ist dies die OPE der Virasoro-Algebra bei $c = 1 + 12\lambda^2$!

Darstellungen

Eine *Höchstgewichtsdarstellung* der Heisenberg-Algebra (1) wird definiert durch die Existenz eines Höchstgewichtsvektors $|\mu\rangle$, so daß

$$\begin{aligned} J_n|\mu\rangle &= 0 \qquad\qquad \forall n > 0\,, \\ J_0|\mu\rangle &= \mu|\mu\rangle\,. \end{aligned}$$

Für eine *irreduzible* Darstellung folgt dann, daß die Vektoren

$$J_{-n}^{k_n} \dots J_{-2}^{k_2} J_{-1}^{k_1} |\mu\rangle \tag{3}$$

mit $0 \leq k_i \in \mathbb{Z}$ eine Basis bilden.

Mit der (Anti-) Involution

$$J_n^\dagger = J_{-n}$$

und der assozierten *kontravarianten Form* $\langle\cdot|\cdot\rangle$, die durch $\langle\mu|\mu\rangle = 1$ normiert ist, wird die irreduzible Höchstgewichtsdarstellung der Heisenberg-Algebra *unitär* für $\mu \in \mathbb{R}$. Dies folgt daraus, daß die Vektoren (3) zueinander orthogonal sind, und deren Norm

$$\langle\mu|J_1^{k_1} J_2^{k_2} \dots J_n^{k_n} J_{-n}^{k_n} \dots J_{-2}^{k_2} J_{-1}^{k_1}|\mu\rangle = \prod_{j=1}^{n} k_j! j^{k_j}$$

erfüllt.

Das über

$$T_\lambda(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n^{(\lambda)}$$

zu (2) assozierte und geeignet modifizierte $L_n^{(\lambda)}$ lautet:

$$\begin{aligned} L_n^{(\lambda)} &= \frac{1}{2}(J\,J)_n - i\lambda n J_n\,, \qquad \text{für } n \neq 0, \\ L_0^{(\lambda)} &= \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2}(J\,J)_0\,. \end{aligned}$$

Dies erfüllt die Virasoro-Algebra mit $c = 1 + 12\lambda^2$. Es gilt

$$L_n^{(\lambda)\,\dagger} = L_{-n}^{(\lambda)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$L_0^{(\lambda)}|\mu\rangle = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}|\mu\rangle\,.$$

Man erhält also manifest unitäre Darstellungen der Virasoro-Algebra für $c \geq 1$ und $h \geq \lambda^2/2 = (c-1)/12$.