Computergestütztes wissenschaftliches Rechnen SS 2007

Übungsblatt 5

Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
PD Dr. A. Honecker, S. Fuchs, J. Lampe

Aufgabe 1

Formulieren Sie das Randwertproblem aus Aufgabe 2 (oder ggfs. auch Aufgabe 3) von Übungsblatt 4 als lineares Gleichungssystem für die $\dim = N^2$ inneren Gitterpunkte !

Achtung: Die Randterme tauchen auf der rechten Seite des Gleichungssystems $A\,\vec{\Phi} = \vec{b}$ auf !

Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe des CG Verfahrens ! Geben Sie als Fehlerschranke dabei eine Genauigkeit (`precision`) von 10^{-8} vor, d.h. brechen Sie das Verfahren ab, sobald $\alpha_k\,\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k$ kleiner als 10^{-16} wird. Betrachten Sie nacheinander die Fälle $N = 21$, 51, 101 und 201 und vergleichen Sie die Programmlaufzeit mit dem Jacobi-Verfahren !

Achtung: A muß nun die Diskretisierung von $-\Delta$ sein (warum ?).

Hinweise:

i. Implementierungen des CG Verfahrens in Java, C++ und C werden Ihnen zusammen mit diesem Übungsblatt zur Verfügung gestellt. Sie können es natürlich auch gerne selbst implementieren.

ii. Unter Unix kann die Laufzeit eines Programms auf der Befehlszeile mit

    `time` Kommando

    gemessen werden.

iii. Eventuelle Grafik-Ausgaben sollten bei einer Laufzeit-Messung deaktiviert werden.

Aufgabe 2

Lösen Sie die Poisson-Gleichung

$$-\Delta\,\Phi = 4\,\pi\,\rho$$

mit Hilfe des CG Verfahrens für die umseitig skizzierte Konfiguration zweier Platten mit Ladung $\pm q$! Am linken und rechten Rand des Rechtecks seien dabei jeweils Neumannsche Randbedingungen vorgegeben

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(L,y) = 0\,,$$

sowie am oberen bzw. unteren Rand Dirichletsche Randbedingungen:

$$\Phi(x,0) = \Phi(x,L) = 0\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie Glg. (3.5) des Skripts um Funktionswerte am linken und rechten Rand zu eliminieren. In Glg. (3.6) des Skripts kann dann z.B. der Funktionswert f_{r-1} am Rand durch den

Funktionswert f_{r+1} im Inneren ersetzt werden. Was passiert an dieser Stelle mit der Genauigkeit der Näherung ?