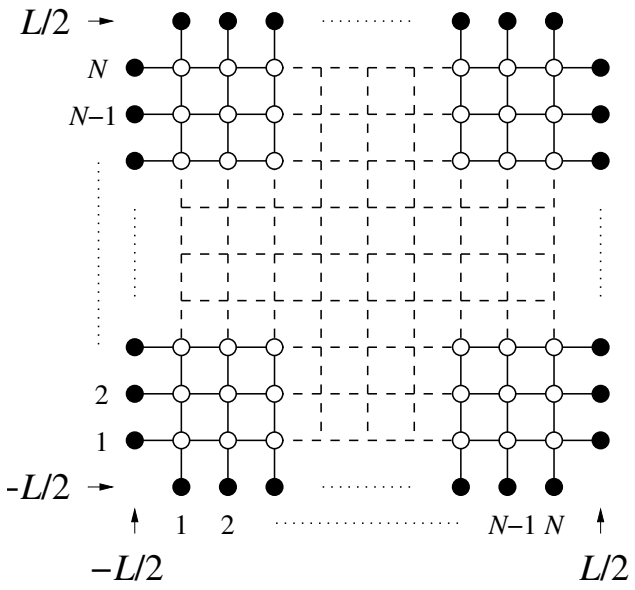
Computergestütztes wissenschaftliches Rechnen SS 2007

Übungsblatt 4

Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Theoretische Physik
PD Dr. A. Honecker, S. Fuchs, J. Lampe



Aufgabe 1

Wir betrachten die Laplace-Gleichung $\Delta\,\Phi = 0$ auf einem Quadrat der Größe $L \times L$. Das Potential sei auf dem Rand vorgegeben (Dirichletsche Randbedingungen). Zur Diskretisierung verwenden wir das oben skizzierte Gitter.
Schreiben Sie ein Programm, das das allgemeine Randwertproblem (d.h. beliebig vorgegebene Werte von Φ auf dem Rand) mit dem Jacobi-Verfahren für die $N \times N$ inneren Gitterpunkte löst !

Bemerkungen:

i. Zur grafischen Darstellung ist es nützlich, das Ergebnis für Φ in eine Datei auszugeben.

ii. Sie können ferner folgende Visualisierung (z.B. in Java) verwenden: Wenn Sie ein Fenster mit (mindestens) $N \times N$ Bildpunkten öffnen, können die Funktionswerte Φ über die Bildpunkte dargestellt werden. Am einfachsten ist die Verwendung von Graustufen, z.B. weiß für $\Phi \geq \Phi_{\text{max}}$ und schwarz für $\Phi \leq \Phi_{\text{min}}$, wobei Φ_{max} bzw. Φ_{min} der maximale bzw. minimale Wert der vorgegebenen Randbedingungen sind (die korrekte Lösung sollte im Bereich $\Phi_{\text{min}} \leq \Phi(x, y) \leq \Phi_{\text{max}}$ liegen).
Aktualisieren Sie die Ausgabe nach jeder Jacobi-Iteration ! So können Sie z.B. in der nächsten Aufgabe sehen, wie sich der Stoff von der „Erde“ ($\Phi = 0$) über das Dach „spannt“.

Aufgabe 2

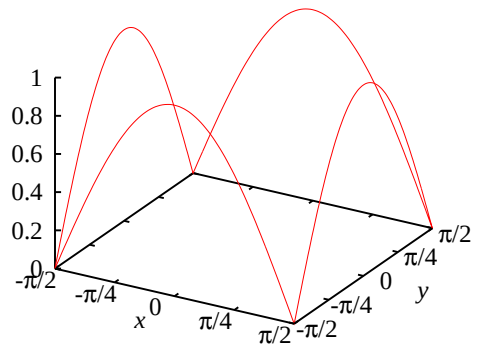
Ein Architekt gebe zur Überdachung des Quadrats

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

($L = \pi$) mit Hilfe von Bögen am Rand die Höhe

$$\Phi\left(x = \pm\frac{\pi}{2}, y\right) = \cos(y)\,, \qquad \Phi\left(x, y = \pm\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

vor (siehe Skizze rechts).



a. Berechnen Sie mit Hilfe des Programms aus Aufgabe 1 wie das mit Stoff bespannte Dach aussieht, wenn Sie Diskretisierungen mit $N = 11, 21, 41, \ldots$ verwenden ! Starten Sie im Inneren mit $\Phi\left(\vec{x}_{\vec{r}}\right) = 0$! Wie oft müssen Sie das Jacobi-Verfahren durchlaufen, um eine Genauigkeit von $\delta\Phi = 10^{-5}$ zu erreichen ?

b. Untersuchen Sie, wie Sie N und $\delta\Phi$ wählen müssen, damit die Abweichung von der exakten Lösung

$$\Phi\left(x, y\right) = \frac{1}{\cosh(\pi/2)}\left(\cos(x)\cosh(y) + \cosh(x)\cos(y)\right) \tag{1}$$

kleiner als 10^{-4} wird !

Aufgabe 3

(optional) Wir betrachten nun ein Quadrat der Größe $L = 2$. Der Rand ist bei $x = \pm L/2 = \pm 1$ geerdet ($\Phi = 0$) und bei $y = \pm L/2 = \pm 1$ sei ein Potential $\Phi(x, \pm 1) = \Phi_0 = 1$ vorgegeben.
Berechnen Sie $\Phi(\vec{x}_{\vec{r}})$ mit Hilfe des Programms aus Aufgabe 1 ! Starten Sie im Inneren mit $\Phi\left(\vec{x}_{\vec{r}}\right) = \Phi_0/2 = 1/2$ und betrachten Sie die Fälle $N = 11, 25, 51$!
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für die verschiedenen N und diskutieren Sie das Verhalten an den Ecken, wobei Sie Φ als elektrostatisches Potential interpretieren sollten !