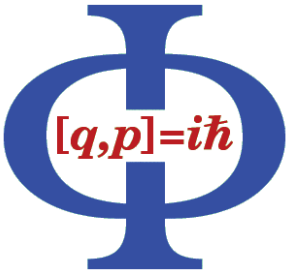
GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN



Institut für Theoretische Physik

Fakultät für Physik
Friedrich-Hund-Platz 1
37077 Göttingen

Skriptum zur Vorlesung

Analytische Mechanik

Andreas Honecker

Wintersemester 2008/09

(Stand: 15. Juli 2011)

PDF-Fassung dieses Skripts (mit Hyperlinks etc.) unter

http://www.theorie.physik.uni-goettingen.de/~honecker/mechanik-skript.pdf

Inhaltsverzeichnis

0 Vorbemerkungen **1**

1 Newtonsche Mechanik **3**
1.1 Newtons Axiome . . . 3
1.2 Konservative Kraftfelder . . . 5
1.3 Energieerhaltung . . . 8
1.4 Mehrteilchensysteme . . . 9

2 Zwangsbedingungen **11**
2.1 Generalisierte Koordinaten . . . 11
2.2 Klassifikation von Zwangsbedingungen . . . 13
2.3 Newtonsche Bewegungsgleichungen und Zwangskräfte . . . 15
2.4 D'Alembertsches Prinzip . . . 19
2.4.1 Zylinder auf schiefer Ebene . . . 20
2.4.2 Mathematisches Pendel . . . 21
2.4.3 Perle auf rotierendem Draht . . . 24

3 Lagrangesche Mechanik **25**
3.1 Lagrangegleichungen 2. Art . . . 25
3.1.1 Zylinder auf schiefer Ebene . . . 28
3.1.2 Mathematisches Pendel . . . 28
3.1.3 Perle auf rotierendem Draht . . . 29
3.1.4 Zwei Perlen auf Drähten mit Feder . . . 30
3.1.5 Forminvarianz . . . 32
3.2 Lagrangegleichungen 1. Art . . . 33
3.2.1 Mathematisches Pendel . . . 36
3.2.2 Reifen auf einer Ebene . . . 37
3.3 Rotierende Bezugssysteme . . . 41
3.3.1 Perle auf erdfestem Draht . . . 44
3.4 Variationsprinzip . . . 47
3.4.1 Variationsrechnung I . . . 47
3.4.2 Lösung des Seil-Problems . . . 52
3.4.3 Variationsrechnung II . . . 53
3.4.4 Hamiltonsches Prinzip . . . 55
3.5 Symmetrien und Erhaltungssätze . . . 57
3.5.1 Zyklische Koordinaten . . . 57
3.5.2 Noether-Theorem . . . 59
3.5.3 Energieerhaltung II . . . 62

4 Anwendungen **65**
4.1 Erhaltungssätze des N-Körper-Problems 65
4.1.1 Galilei-Gruppe 65
4.1.2 Erhaltungsgrößen eines abgeschlossenen N-Körper-Problems . 67
4.2 Zweikörper-Zentralproblem 70
4.2.1 Zurückführung auf äquivalentes Einkörperproblem 71
4.2.2 Bewegung im Zentralkraftfeld 72
4.2.3 Effektives Potential 75
4.2.4 Keplerproblem 80
4.2.5 Streuung in einem Zentralpotential 86
4.3 Starrer Körper 91
4.3.1 Kinetische Energie und Tragheitstensor 92
4.3.2 Kreiszylinder 95
4.3.3 Euler-Winkel 98
4.3.4 Lagrangegleichungen des starren Körpers 102
4.3.5 Stabilitätsanalyse eines aufrecht stehenden Kreisels 107

5 Hamiltonsche Mechanik **109**
5.1 Hamiltonsche Gleichungen 109
5.1.1 Legendre-Transformation 109
5.1.2 Hamiltonfunktion und Bewegungsgleichungen 111
5.1.3 Hamiltonsches Prinzip 115
5.2 Poisson-Klammern 116
5.2.1 Harmonischer Oszillator 118
5.2.2 Poissonsches Theorem 119
5.2.3 Bedeutung für die Quantenmechanik 120
5.3 Kleine Schwingungen 120
5.3.1 Ebenes Doppelpendel 127
5.4 Kanonische Transformationen 129
5.4.1 Berechnung der Erzeugenden aus der Transformation 134
5.4.2 Berechnung der Transformation aus der Erzeugenden 134
5.4.3 Harmonischer Oszillator 135
5.4.4 Kanonische Invarianz der Poisson-Klammern 136
5.5 Hamilton-Jacobi Theorie 139
5.5.1 Zentralproblem 141
5.6 Liouvillescher Satz 142
5.6.1 Zeitentwicklung als kanonische Transformation 143
5.6.2 Kanonische Invarianz des Phasenraumvolumens 144
5.6.3 Herleitung des Liouvilleschen Satzes 145

6 Schlußbemerkungen **151**

7 Einige wichtige Gleichungen **153**

8 Notation **154**

0 Vorbemerkungen

Bei der „Analytischen Mechanik“ handelt es sich um Ihre erste Vorlesung aus der Theoretischen Physik. In dieser Vorlesung werden Sie sicherlich einige für Sie neue Konzepte kennen lernen. Diese Vorlesung wird so aufgebaut sein, dass Sie frühzeitig mit diesen neuen Konzepten konfrontiert werden, d.h. wir werden uns nach einer kurzen Erinnerung an die Newtonsche Mechanik über Zwangsbedingungen gleich an den Lagrange-Formalismus heran tasten. Selbstverständlich werden auch komplexere Probleme (wie z.B. das Zentralproblem) besprochen, allerdings erst zu einem späteren Zeitpunkt.

Der Versuch, ein Skript herauszugeben, soll auf keinen Fall den Eindruck erwecken, dass man auf ein gutes Lehrbuch verzichten könnte. Ein Aspekt ist, dass dieses Skript parallel zur Vorlesung entsteht und voraussichtlich zumindest in der ersten Fassung gespickt mit Tippfehlern sein wird (die ich mich natürlich zu korrigieren bemühen werde, sobald sie auffallen). Wichtiger ist jedoch, dass dieses Skript nicht die Breite eines Lehrbuches erreichen wird. Auch sind unterschiedliche Darstellungen bekanntlich nützlich, um den Stoff gut zu verstehen.

Unter den klassischen Lehrbüchern paßt der Aufbau des Buches von Herbert Goldstein [10], das mittlerweile in einer stark überarbeiteten Fassung vorliegt [11], gut zu dieser Vorlesung. Unter den neueren Lehrbüchern korrespondieren unter anderem die von Nolting [25] und Fließbach [8] zum Aufbau der Vorlesung. Auch der „Kuypers“ hat sich von einer ursprünglich kompakten Zusammenfassung [17] inzwischen zu einem umfangreichen Lehrbuch gemausert [18]. Eine kostengünstige Alternative ist das Skript zu der Vorlesung von Herrn Hegerfeldt aus dem Windersemester 1993/94 [14], das in einer gebundenen Fassung erhältlich ist; ein anderes ebenfalls nützliches Skript stammt von Herrn Schönhammer [28]. Es gibt zahlreiche weitere Bücher, die allerdings z.T. weniger gut zu dieser Vorlesung passen. Ich kann Ihnen an dieser Stelle nur empfehlen, verschiedene Bücher anzusehen und selbst zu entscheiden, mit welchen sie am besten arbeiten können.

Zurück zu diesem Skript: Sie müssen nicht nur mit Korrekturen, sondern auch z.B. mit Aktualisierungen der Querverweise und ggfs. Ergänzungen rechnen. Sie sollten es daher möglichst selten ausdrucken. Wenn Sie vor Ende der Vorlesung zum Arbeiten einen Ausdruck benötigen, sollte Sie sich bei dem Ausdruck auf die Teile beschränken,

die Sie konkret benötigen.

Göttingen, 16. Oktober (aktualisiert 12. Dezember) 2008

Andreas Honecker

1 Newtonsche Mechanik

Die Newtonsche Mechanik ist für Sie nichts neues. Wir wollen daher hier nur kurz einige Aspekte zusammenfassen, die im weiteren wichtig sein werden.

1.1 Newtons Axiome

Die Grundlagen für eine moderne Sichtweise der klassischen Mechanik wurden vor ca. 300 Jahren von Isaac Newton gelegt. Eine zentrale Rolle spielen hierbei die drei Newtonschen Axiome, die Sie im lateinischen Urtext z.B. auf den Seiten 40 und 41 von [23] finden. Wir wollen die Newtonschen Axiome hier in einer moderneren Formulierung präsentieren.

Das erste Axiom besagt, dass Körper im Zustand der Ruhe verharren oder sich gleichförmig geradlinig bewegen, wenn keine Kräfte auf sie einwirken. Der Begriff „Kraft“ ist hier allerdings noch nicht spezifiziert. Allerdings besagt die Erfahrung, dass Kräfte auf einen Körper generell durch Objekte (speziell andere Körper) in dessen Umgebung vermittelt werden, so dass wir Kräfte-Freiheit durch eine „leere“ Umgebung ersetzen können. Auch ist es notwendig, bei diesem Axiom eine Aussage über das Bezugssystem zu machen. Ist eine Bahnkurve in einem gegebenem Bezugssystem linear und gleichförmig, so erscheint sie in einem zweiten Bezugssystem, das relativ zu dem ersten rotiert, nämlich keineswegs als linear und gleichförmig.

> *Erstes Axiom:* Es gibt Bezugssysteme, in denen sich *alle* Körper, die keine Umgebung haben, gleichförmig und geradlinig bewegen.

Der Zustand der Ruhe ist hierbei als Spezialfall einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung eingeschlossen. Ein Bezugssystem, das dieses erste Axiom erfüllt, wird „*Inertialsystem*“ genannt. In der Praxis kann jedes Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum Fixsternhimmel bewegt, als Inertialsystem betrachtet werden.

Ferner wird ein „Körper“ idealisiert als ein Massenpunkt, der eindeutig durch seinen Ortsvektor $\vec{r}$ und seine Masse m beschrieben wird. Der Bewegungzustand des Körpers wird nun durch seine *Trajektorie* $\vec{r}(t)$ beschrieben. Einer solchen Trajektorie sind eine *Geschwindigkeit*

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \tag{1.1}$$

und eine *Beschleunigung*

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \tag{1.2}$$

zugeordnet. Für eine gleichförmige geradlinige Bewegung hat die Bahnkurve die Form

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t\,, \tag{1.3}$$

mit konstanten $\vec{r}_0$ und $\vec{v}_0$.

Zwei Inertialsysteme können sich um eine konstante Relativgeschwindigkeit $\vec{u}$ unterscheiden. Damit unterscheiden sich alle Geschwindigkeiten von Bahnkurven in diesen beiden Inertialsystemen um $\vec{u}$. Aufgrund von $\dot{\vec{u}} = \vec{0}$ und (1.2) sind hingegen die Beschleunigungen in allen Intertialsystemen gleich groß.

Das zweite Newtonsche Axiom macht Aussagen über den Einfluß der Umgebung auf einen Körper. Diese äußert sich in Kräften, die für Abweichungen von der gleichförmigen linearen Bewegung verwantwortlich sind. An dieser Stelle ist es nützlich, den *Impuls* eines Körpers einzuführen:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}\,. \tag{1.4}$$

Zweites Axiom: In einem Inertialsystem gilt:

$$\vec{F} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m\,\vec{v}) = \dot{m}\,\vec{v} + m\,\vec{a} \tag{1.5}$$

$$(\;=\; m\,\vec{a}\;)\,. \tag{1.6}$$

Zunächst sei darauf hingewiesen, dass über die Form der hier auftretenden *Kraft* $\vec{F}$ nach wie vor keine Aussage gemacht wurde (wie im übrigen auch über die Masse m, die wir bereits weiter vorne wie selbstverständlich eingeführt haben). Für konstante Masse nimmt das zweite Newtonsche Axiom die bekanntere Form (1.6) an. Da die Beschleunigung in allen Inertialsystemen gleich ist, gilt in diesem Fall, dass auch die Kraft nicht von dem betrachteten Bezugssystem abhängt (es muß sich allerdings um ein Intertialsystem handeln). In allgemeineren Situationen mit veränderlicher Masse (Beispiel Rakete) ist jedoch (1.5) zu verwenden.

Das dritte Newtonsche Axiom („actio = reactio“) wird es uns erlauben, die Masse m zu definieren.

Drittes Axiom: Die Kraft $\vec{F}_{1,2}$, die ein Körper 1 auf einen Körper 2 ausübt, ist entgegengesetzt gleich der Kraft $\vec{F}_{2,1}$, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt:

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}\,. \tag{1.7}$$

In einem abgeschlossenen Inertialsystem, in dem lediglich zwei konstante Massen miteinander wechselwirken, gilt nach dem zweiten Axiom (1.6)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{2,1}\,, \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \\ \Rightarrow \quad \left|\frac{m_1}{m_2}\right| &= \frac{\left|\ddot{\vec{r}}_2\right|}{\left|\ddot{\vec{r}}_1\right|}\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Somit können durch Beschleunigungsmessungen alle Massenverhältnisse bestimmt werden. Die absolute Einheit wird per Konvention festgelegt (z.Zt. über das in Paris aufbewahrte „Ur-Kilogramm“).

Ist die Masse bekannt, kann aus einer vermessenen Bahnkurve $\vec{r}(t)$ anhand von (1.5) die zugehörge Kraft $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ rekonstruiert werden. Wie allgemein in der Physik üblich, gilt auch hier, dass man bemüht ist, aus einer begrenzten Anzahl von Messungen allgemeingültige Gesetze herzuleiten. Letzten Endes wird also ein mit den Beobachtungen verträgliches Kraftgesetz $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ postuliert.

Für gegebenes $\vec{F}$ und m spricht man bei (1.5) von einer *Bewegungsgleichung*, die eine Bahnkurve aus den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0)=\vec{r}_0$, $\vec{v}(t=0)=\vec{v}_0$ bestimmt. Aus mathematische Sichtweise ist dies ein Anfangswertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung.

1.2 Konservative Kraftfelder

Die Arbeit, die von einer Kraft $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ entlang eines Weges $\vec{r}(t)$ mit $\vec{r}(t_1)=\vec{r}_1$, $\vec{r}(t_2)=\vec{r}_2$ verrichtet wird, lautet

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\,. \tag{1.9}$$

Mit Hilfe der Substitionsregel können wir $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t$ schreiben, so dass die Arbeit (1.9) die Form

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\vec{v}(t)\cdot\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t) \tag{1.10}$$

annimmt.

Wir beschränken uns im folgenden auf Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)=\vec{F}(\vec{r})$, die weder explizit von der Zeit t noch der Geschwindigkeit $\vec{v}$ abhängen, sondern nur vom Ort $\vec{r}$. Zunächst folgt aus der Form (1.9), dass in diesem Fall die Arbeit nur von dem Weg,

aber nicht von dessen Parametrisierung $\vec{r}(t)$ abhängt. Von besonderem Interesse sind solche Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$, für die die Arbeit W nicht von dem genauen Weg, sondern nur von dessen Endpunkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ abhängt; diese werden „konservativ“ genannt.

Definition: Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ heißt *konservativ*, falls

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \tag{1.11}$$

für alle geschlossenen Wege C, d.h. wenn entlang eines geschlossenen Weges keine Arbeit verrichtet wird.

Durch Wahl eines beliegen Anfangspunktes $\vec{r}_0$ kann man einem konservativen Kraftfeld ein skalares Feld

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{\rho} \cdot \vec{F}(\vec{\rho}) \tag{1.12}$$

zuordnen.

Definition: Ein skalares Feld $V(\vec{r})$ mit der Eigenschaft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\, V(\vec{r}) \tag{1.13}$$

heißt *Potential* (oder „potentielle Energie“) für das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$.

Das Vorzeichen in (1.13) (bzw. (1.12)) ist Konvention und hat keine physikalische Bedeutung.

Wir haben bereits implizit einige Eigenschaften konservativer Kraftfelder bzw. der zugeordneten Potentiale angenommen. Tatsächlich sind folgende Definitionen für konservative Kraftfelder äquivalent:

(i) $W(C) = \oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlosssenen Wege C;

(ii) $W(C) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ des Weges C ab, aber nicht von dessen Form;

(iii) es gibt ein Potential $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\, V(\vec{r})$;

(iv) $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ überall.

Um die paarweise Äquivalenz dieser vier Definitionen zu zeigen, reicht es, z.B. die Folgerungen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) zu verifizieren:

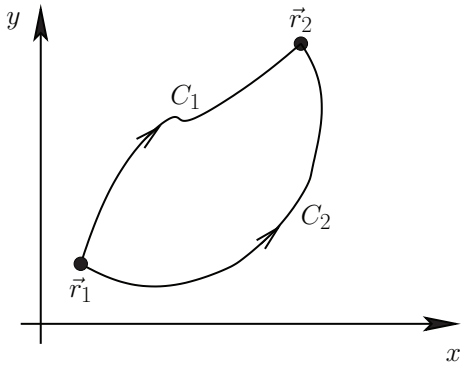


Abbildung 1.1: *Zwei Wege C_1, C_2 von einem Punkt $\vec{r}_1$ zu einem anderen Punkt $\vec{r}_2$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): Gegeben sind zwei verschiedene Wege C_1, C_2 von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ (siehe Abb. 1.1). Wir müssen zeigen, dass $W(C_1) = W(C_2)$. Bezeichnen wir mit $\bar{C}_2$ die in negativem Sinn durchlaufene Kurve C_2, so ist $C = C_1 \cup \bar{C}_2$ eine geschlossene Kurve, auf die wir die Aussage (i) anwenden können. Damit haben wir

$$W(C_1) - W(C_2) = W(C_1) + W(\bar{C}_2) = W(C_1 \cup \bar{C}_2) = W(C) = 0\,, \qquad (1.14)$$

womit die Aussage von (ii) folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wir definierern $V(\vec{r})$ gemäß (1.12). Da (ii) gilt, ist $V(\vec{r})$ nur von der Wahl $\vec{r}_0$ abhängig, jedoch nicht von dem Weg von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$. Für die so definierte Funktion V gilt offensichtlich (1.13), womit die Aussage (iii) folgt.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Wir setzen ein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\, V(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} V(\vec{r}) = \vec{0}\,. \qquad (1.15)$$

Im letzten Schritt haben wir dabei vorausgesetzt, dass das skalare Feld V hinreichend oft differenzierbar ist, so dass wir die partiellen Ableitungen vertauschen können. Damit wäre (iv) gezeigt.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Gegeben ein beliebiger geschlossener Weg C. Dann betrachten wir eine geeignete Oberfläche A, deren Rand C ist ($C = \partial A$). Nach dem Satz von Stokes gilt:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_A \mathrm{d}\vec{A} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})}_{= \vec{0} \text{ nach (iv)}} = 0\,, \qquad (1.16)$$

wobei $\mathrm{d}\vec{A}$ das Flächenelement mit der entsprechenden Normale auf der Fläche ist. Damit ist auch (i) gezeigt und der Ring geschlossen.

Aufgrund von (iii) und (ii) ist die in einem konservativen Kraftfeld auf einem Weg C von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ geleistete Arbeit gegeben durch die Differenz der Potentiale an den beiden Punkten:

$$W(C) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)\,. \tag{1.17}$$

Schließlich wollen wir noch eine Bemerkung zu dem Unterschied zwischen zwei Potentialen $V(\vec{r})$ und $\tilde{V}(\vec{r})$ machen, die nach (1.12) mit einem Anfangspunkt $\vec{r}_0$ bzw. $\tilde{\vec{r}}_0$ definiert sind. Aufgrund der Unabhängigkeit von dem Weg können wir diesen bei V von $\vec{r}_0$ über $\tilde{\vec{r}}_0$ nach $\vec{r}$ laufen lassen. Damit findet man

$$V(\vec{r}) = \tilde{V}(\vec{r}) + V(\tilde{\vec{r}}_0)\,. \tag{1.18}$$

Dies zeigt $\tilde{V}(\vec{r}) = V(\vec{r}) - V(\tilde{\vec{r}}_0)$, d.h. zwei Potentiale für ein festes konservatives Kraftfeld unterscheiden sich lediglich durch eine additive Konstante.

1.3 Energieerhaltung

Nun soll mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung (1.5) die Energieerhaltung für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ und konstante Masse m hergeleitet werden. Dazu definieren wir neben dem bereits im letzten Unterkapitel eingeführten Potential $V(\vec{r})$ die *kinetische Energie*

$$T = \frac{m}{2}\,\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\,\vec{v}^2 \tag{1.19}$$

und die *Gesamtenergie*

$$E = T + V\,. \tag{1.20}$$

Wir betrachten nun eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$, d.h. eine Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung (1.5) zwischen zwei Zeiten t_1 und t_2. Einerseits gilt aufgrund der Überlegungen des letzten Unterkapitels

$$\int\limits_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)) = V_1 - V_2\,. \tag{1.21}$$

Andererseits gilt nach Substitution der Integration und Einsetzen der Newtonschen Bewegungsgleichung (1.5)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\vec{v}(t)\cdot\vec{F}(\vec{r}(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\vec{v}(t)\cdot m\,\dot{\vec{v}}(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\,\vec{v}(t)^2\right)\\ &= \left(\frac{m}{2}\,\vec{v}(t_2)^2\right) - \left(\frac{m}{2}\,\vec{v}(t_1)^2\right) = T_2 - T_1\,.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Gleichsetzen von (1.21) und (1.22) zeigt nun $V_1 - V_2 = T_2 - T_1$, bzw.

$$E_1 = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E_2\,. \tag{1.23}$$

Somit ist gezeigt, dass die Gesamtenergie (1.20) entlang einer Bahnkurve in einem konservativen Kraftfeld konstant ist.

1.4 Mehrteilchensysteme

Der Vollständigkeit halber sei noch kurz die Verallgemeinerung auf Mehrteilchensysteme angegeben. Gegeben seien also N Körper mit Massen m_i, Bahnkurven $\vec{r}_i(t)$, zugehörigen Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$, etc.

Nach dem Superpositionsprinzip verallgemeinert sich das zweite Newtonsche Axiom (1.5) zu

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{\text{ges.}} = \vec{F}_i^{\text{ext.}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{j,i}\,, \tag{1.24}$$

wobei die äußere Kraft $\vec{F}_i^{\text{ext.}}$ nur auf den $i$ten Körper wirkt und $\vec{F}_{j,i}$ die Kraft ist, die die Körper i und j aufeinander ausüben. Nach dem dritten Newtonschen Axiom (1.7) gilt $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$. Tatsächlich hatten wir die einfachste Form von (1.24) ohne externe Kräfte (d.h. $\vec{F}_i^{\text{ext.}} = \vec{0}$) bereits zur Bestimmung der Massenverhältnisse (1.8) benutzt.

Das Potential $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ für ein konservatives Kraftfeld des N-Körper-Problems wird in Verallgemeinerung von (1.13) so eingeführt, dass die Kraft auf den $i$ten Körper gegeben ist durch

$$\vec{F}_i^{\text{ges.}}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = -\vec{\nabla}_i\, V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)\,, \tag{1.25}$$

wobei $\vec{\nabla}_i$ der Gradient bzgl. der $i$ten Koordinate $\vec{r}_i$ ist.

Die Erhaltung der Gesamtenergie

$$E = V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) + \sum_{i=1}^{N} T_i \qquad \text{mit} \qquad T_i = \frac{m_i}{2}\,\vec{v}_i^{\,2} \tag{1.26}$$

wird genau wie im Unterkapitel 1.3 hergeleitet. In (1.21) und (1.22) sind die Integrale über die Bahnkurven lediglich durch Summen der Integrale über alle Bahnkurven $\vec{r}_i(t)$ mit den entsprechenden Integranden ($\vec{F}_i^{\text{ges.}}$ etc.) zu ersetzen.

2 Zwangsbedingungen

Viele praktische Probleme behandeln Bewegungen unter geometrischen Einschränkungen. Ein Beispiel ist die in Abb. 2.1 skizzierte Situation, in der ein Kreiszylinder mit Radius r eine um den Winkel α geneigte schiefe Ebene ohne Schlupf herunterrollt[1]. Ein weiteres Standardbeispiel ist das in Abb. 2.2 skizzierte mathematische Pendel, das in der x-z-Ebene schwingt. Hier schränkt ein Faden den Abstand des Massenpunktes vom Koordinatenursprung auf den Wert ℓ ein. Abb. 2.3 zeigt ein weiteres etwas komplizierteres Beispiel. Hier dreht sich ein parabelförmig gebogener Draht mit $z = a\,r^2 = a\,(x^2 + y^2)$ mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Auf diesem Draht gleitet eine „Perle“ (die wir wieder als punktförmig betrachten wollen).

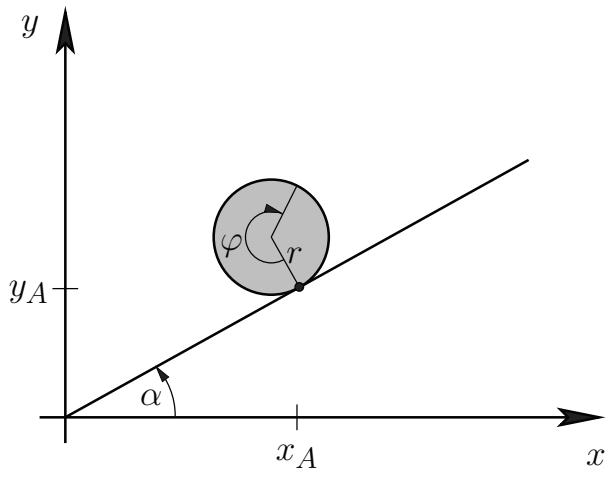


Abbildung 2.1: *Ein Zylinder mit Radius r rollt ohne Schlupf eine schiefe Ebene herunter.*

2.1 Generalisierte Koordinaten

Offensichtlich ist es keine gute Idee, die skizzierten Probleme in kartesischen Koordinaten lösen zu wollen. Stattdessen ist es günstig, eine an das Problem bzw. die Zwangsbedingungen angepasste Parametrisierung zu verwenden. Für ein N-Körperproblem führt man $3\,N$ Parameter q_i, $i = 1, \ldots, 3\,N$ ein und schreibt

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t)\,, \qquad i = 1, \ldots 3\,N\,, \tag{2.1}$$

[1] Entgegen der Ankündigung aus Kapitel 1, dass wir uns zunächst mit Massenpunkten beschäftigen wollen, handelt es sich bei dem Zylinder genaugenommen um einen ausgedehnten Körper. Allerdings interessiert uns hier primär die geometrische Einschränkung, die sich aus der Form des Zylinders ergibt. In den folgenden Betrachtungen vernachlässigen wir zunächst die Rotationsfreiheitsgrade des Zylinders; für eine vollständige Betrachtung siehe Unterkapitel 4.3.2.

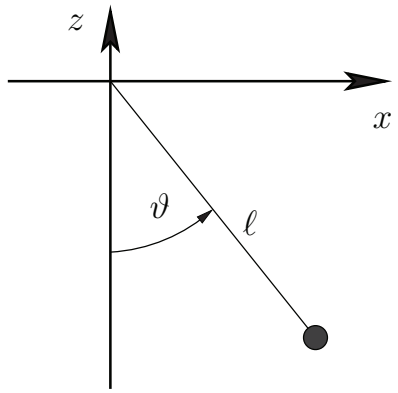


Abbildung 2.2: *Ein ebenes mathematisches Pendel der Länge ℓ schwingt in der x-z-Ebene.*

bzw. in vektorieller Form

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t)\,, \qquad j = 1, \ldots N\,. \tag{2.2}$$

Die explizite Zeitabhängigkeit ermöglicht es hierbei, auch für explizit zeitabhängige Probleme geeignet angepasste Koordinaten einzuführen. Die q_i heißen „*generalisierte*“ (verallgemeinerte) Koordinaten.

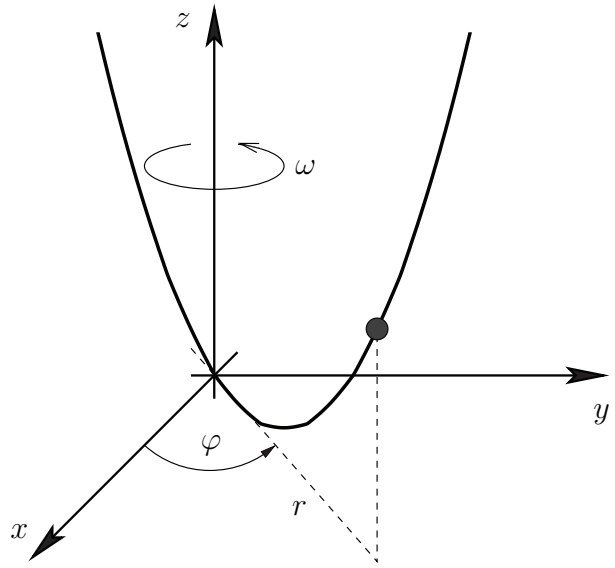


Abbildung 2.3: *Eine Perle gleitet auf einem parabelförmig gebogenen Draht, der sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht.*

2.2 Klassifikation von Zwangsbedingungen

Eine wichtige Klasse stellen die *holonomen Zwangsbedingungen* dar. Diese sind durch Einschränkungen der Bewegung in der Form

$$f_i(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots k \tag{2.3}$$

definiert. k unabhängige Nebenbedingungen reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade eines N-Körper-Problems auf $3\,N - k$. Bei dieser Aussage haben wir zunächst an drei räumliche Dimensionen gedacht. Ist die Anzahl der Freiheitsgrade ursprünglich n (z.B. in zwei Dimensionen $n = 2\,N$), reduzieren k unabhängige Nebenbedingungen die Anzahl der Freiheitsgrade auf $n - k$. Eingeschränkte Bewegungen besitzen also in jedem Fall weniger Freiheitsgrade als die korrespondierenden freien.

Alle bisher erwähnten Beispiele gehören zur Klasse der holonomen Zwangsbedingungen, wie wir nun im Detail erläutern wollen.

Beispiel 2.1: Nach Projektion in die x-y-Ebene würde man 3 Koordinaten benötigen, um die Position des Zylinders anzugeben, z.B. zwei Koordinaten x_A, y_A für einen Randpunkt sowie den Orientierungswinkel φ des Zylinders. Ist die Bewegung durch den Kontakt mit der schiefen Ebene eingeschränkt, so hat man nur noch *eine* unabhängige Koordinate, die wir z.B. als φ wählen können. Für die Koordinaten des Kontaktpunkts x_A, y_A zwischen dem Zylinder und der schiefen Ebene gilt

$$x_A - r\,\varphi\,\cos\alpha = 0\,, \qquad y_A - r\,\varphi\,\sin\alpha = 0\,, \tag{2.4}$$

d.h. $x_A(\varphi) = r\,\varphi\,\cos\alpha$, $y_A(\varphi) = r\,\varphi\,\sin\alpha$ (man betrachte Abb. 2.1 und stelle sich vor, dass der Zylinder von $x_A = 0 = y_A$ für $\varphi = 0$ die schiefe Ebene hochgerollt wird). Die Gleichungen (2.4) stellen zwei unabhängige holonome Nebenbedingungen vom Typ (2.3) dar, die die ursprünglichen drei Freiheitsgrade auf einen reduzieren.

Beispiel 2.2: Ein Massenpunkt in der Ebene wird durch 2 Koordinaten charakterisiert, die wir hier x und z genannt haben. Für das mathematische Pendel sind die angepassten Koordinaten Polarkoordinaten $x = r\,\sin\vartheta$, $z = -r\,\cos\vartheta$, wobei die beiden Freiheitsgrade nun durch r und ϑ parametrisiert werden. Die Zwangsbedingung nimmt dann wieder die Form (2.3) an

$$r - \ell = 0\,. \tag{2.5}$$

Die eine Nebenbedingung reduziert die ursprünglichen zwei Freiheitsgrade x, z auf einen, den wir als ϑ wählen können.

Beispiel 2.3: Hier gehen wir von 3 Koordinaten x, y, z aus. Die angepassten generalisierten Koordinaten sind hier Zylinderkoordinaten $x = r\,\cos\varphi$, $y = r\,\sin\varphi$, z. Die Einschränkungen nehmen nun die Form

$$\varphi - \omega\,t = 0\,, \qquad z - a\,r^2 = 0 \tag{2.6}$$

an. Auch diese Nebenbedingungen haben die Form (2.3); sie reduzieren die ursprünglichen drei Freiheitsgrade um zwei auf einen, den wir z.B. als Radialkoordinate r wählen können.

Allgemein können holonome Zwangsbedingungen in *differentieller Form* geschrieben werden. Dazu betrachten wir die totale zeitliche Ableitung von (2.3)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t) \\ &= \sum_{j=1}^{3\,N} \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} f_i(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_i(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t)\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

d.h.

$$\sum_{j=1}^{3\,N} a_{i,j}\, \dot{q}_j + a_{i,t} = 0 \tag{2.8}$$

mit

$$a_{i,j} = \frac{\partial\, f_i}{\partial q_j}\,, \qquad a_{i,t} = \frac{\partial\, f_i}{\partial t}\,. \tag{2.9}$$

Alle Zwangsbedingungen, die sich *nicht* in der Form (2.3) schreiben lassen, bezeichnet man als *nicht-holonome Zwangsbedingungen*. Zwangsbedingungen, die durch Ungleichungen beschrieben werden, sind ein wichtiges Beispiel für nicht-holonome Zwangsbedingungen. Betrachten wir z.B. ein punktförmiges Teilchen, das auf einer Kugel mit Radius R herunterrutscht und von dieser abheben kann. Die Zwangsbedingung lautet in Kugelkoordinaten

$$r^2 - R^2 \geq 0\,. \tag{2.10}$$

Dies kann offensichtlich nicht in die Form 2.3 gebracht werden, d.h. es handelt sich um eine nicht-holonome Zwangsbedingung.

Es gibt auch nicht-holonome Zwangsbedingungen, die sich in der Form (2.8) schreiben lassen (ein Beispiel finden Sie in den Übungsaufgaben). Zwangsbedingungen der Form (2.8) sind genau dann nicht-holonom, wenn sie sich (ohne Kenntnis des Bewegungsablaufes) nicht integrieren lassen, d.h. wenn die Funktionen $a_{i,j}(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t)$, $a_{i,t}(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t)$ *nicht* in der Form (2.9) geschrieben werden können.

Zwangsbedingungen werden schließlich noch in „rheonome“ (fließende) und „skleronome“ (starre) unterteilt. Zwangsbedingungen, die die Zeit explizit enthalten, werden *rheonom* genannt, solche, die die Zeit *nicht* explizit enthalten, heißen *skleronom*. Da Glg. (2.6) die Zeit t explizit enthält, handelt es sich bei dem Beispiel 2.3 um eine rheonome Zwangsbedingung. Die Zwangsbedingungen in den Beispielen 2.1 und 2.2 sowie in dem Teilchen, das eine Kugeloberfläche herunterläuft (siehe (2.10)) sind alle zeitunabhängig, d.h. skleronom.

2.3 Newtonsche Bewegungsgleichungen und Zwangskräfte

Zunächst stellt man fest, das für ein N-Teilchenproblem, das k unabhängige Zwangsbedingungen erfüllt, nur $3\,N-k$ Koordinaten unabhängig sind und somit nur für diese Bewegungsgleichungen aufzustellen sind. Für holonome Zwangsbedingungen kann man dieses Problem grundsätzlich lösen, indem man $3\,N-k$ unabhängige Koordinaten $\tilde{q}_j$ wählt und dann (2.3) nach q_l auflöst:

$$q_l = q_l(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{3\,N-k}, t)\,, \qquad l = 1, \ldots 3\,N\,. \tag{2.11}$$

Wir schränken uns nun auf konstante Massen m_i ein. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen (1.24) lauten dann

$$m_i\,\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{\text{ges.}}\,. \tag{2.12}$$

Leider gelten diese Bewegungsgleichungen beim Vorliegen von Zwangsbedingungen nicht, denn die aus (2.12) gewonnen Bahnkurven $\vec{r}_i(t)$ verletzen im Regelfall die gewählten Zwangsbedingungen. Zwangsbedingungen führen also im allgemeinen zu Bahnkurven, die von (2.12) abweichen. Diese Abweichungen beschreibt man, indem man in (2.12) zusätzliche *Zwangskräfte* $\vec{Z}_i$ einführt:

$$m_i\,\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{\text{ges.}} + \vec{Z}_i\,. \tag{2.13}$$

Hierbei ist $\vec{F}_i^{\text{ges.}}$ nach wie vor die eingeprägte Kraft. Die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ kann man so verstehen, dass man eine *zusätzliche* Kraft aufbringen muß, um der Bahnkurve die Nebenbedingungen aufzuzwingen (im Beispiel des Pendels 2.2 ist dies die Fadenspannung, die den Körper im Abstand ℓ vom Ursprung hält). Da die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ aus den Nebenbedingungen folgen, ist ihre *Wirkung* bekannt. Ihre genaue Form, insbesondere ihre Größe ist jedoch zunächst unbekannt. Die Bewegungsgleichungen (2.13) können daher im allgemeinen nicht direkt gelöst werden, sondern es sind zusätzliche Überlegungen erforderlich, um die Zwangsbedingungen zu eliminieren.

Beispiel 2.1: Wir betrachten den Kreiszylinder auf der schiefen Ebene im Gravitationsfeld $\vec{F} = -m\,g\,\vec{e}_y$. Die Bewegungsgleichungen (2.13) für den Aufpunkt (x_A, y_A) lauten dann

$$m\,\ddot{x}_A = Z_x\,, \qquad m\,\ddot{y}_A = Z_y - m\,g\,. \tag{2.14}$$

Wir verwenden nun die generalisierten Koordinaten (2.4), d.h. $x_A(\varphi) = r\,\varphi\,\cos\alpha$, $y_A(\varphi) = r\,\varphi\,\sin\alpha$. Zweimaliges Differenzieren nach der Zeit t liefert

$$\ddot{x}_A = r\,\ddot{\varphi}\,\cos\alpha\,, \qquad \ddot{y}_A = r\,\ddot{\varphi}\,\sin\alpha\,. \tag{2.15}$$

Wir setzen dies in (2.14) ein und erhalten

$$m\,r\,\ddot{\varphi}\,\cos\alpha = Z_x\,, \qquad m\,r\,\ddot{\varphi}\,\sin\alpha = Z_y - m\,g\,. \tag{2.16}$$

Damit haben wir unsere erste Aufgabe gelöst: Das Problem ist auf die unabhängige Koordinate φ umgeschrieben.

Es bleibt ein weiteres Problem zu lösen: Die Zwangskraft $\vec{Z}$ ist aus (2.16) zu eliminieren. Dazu erinnern wir uns, dass die Zwangskraft dafür sorgt, dass der Aufpunkt auf die schiefe Ebene gezwungen wird; sie wirkt somit senkrecht zur Ebene. Für die Zwangskraft muß also gelten

$$Z_x = -Z\,\sin\alpha\,, \qquad Z_y = Z\,\cos\alpha\,, \tag{2.17}$$

wobei der Betrag Z der Zwangskraft immer noch unbekannt ist. Wir setzen Z_x nach (2.17) in die erste Gleichung von (2.16) ein:

$$m\,r\,\ddot{\varphi}\,\cos\alpha = -Z\,\sin\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad Z = -\frac{m\,r\,\ddot{\varphi}\,\cos\alpha}{\sin\alpha}\,. \tag{2.18}$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die zweite Gleichung von (2.17) ein und finden somit $Z_y = -m\,r\,\ddot{\varphi}\,\cos^2\alpha/\sin\alpha$. Dies wird wiederum in die zweite Gleichung von (2.16) eingesetzt, womit man folgendes Ergebnis erhält:

$$\begin{aligned} m\,r\,\ddot{\varphi}\,\sin\alpha &= -\frac{m\,r\,\ddot{\varphi}\,\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - m\,g \\ \Leftrightarrow \qquad r\,\ddot{\varphi}\,\sin^2\alpha &= -\,r\,\ddot{\varphi}\,\cos^2\alpha - g\,\sin\alpha \\ \Leftrightarrow \qquad \ddot{\varphi} &= -\frac{g\,\sin\alpha}{r}\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Damit ist das Ziel erreicht: Wir haben die Bewegungsgleichung für die unabhängige Variable φ gefunden. Das Ergebnis (2.19) ist plausibel. Die Gravitationskraft wirkt auf die Koordinate $r\,\varphi$ entlang der Ebene reduziert durch den Faktor $\sin\alpha$. Für $\alpha = 0$ wirkt somit effektiv keine Kraft, während für eine senkrecht stehende Ebene ($\alpha = 90°$) die Zwangsbedingung auf die Koordinate entlang der Ebene nicht wirkt, so dass die volle Gravitationskraft zum Tragen kommt.

Die Bewegungsgleichung (2.19) kann nun leicht gelöst werden. Für gegebene Anfangsbedingungen $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$ findet man

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)\,t - \frac{g\,\sin\alpha}{2\,r}\,t^2\,. \tag{2.20}$$

Wir wollen die anhand des Beispiels durchgeführten Überlegungen nun präziser formulieren. Zunächst benötigt man eine Aussage über die Richtung der Zwangskräfte:

> *Annahme:* Die Zwangskräfte $\vec{Z}_j$ stehen zu jeder Zeit senkrecht auf den durch die Zwangsbedingungen $f_i(q_1, \ldots, q_{3\,N}, t) = 0$ definierten

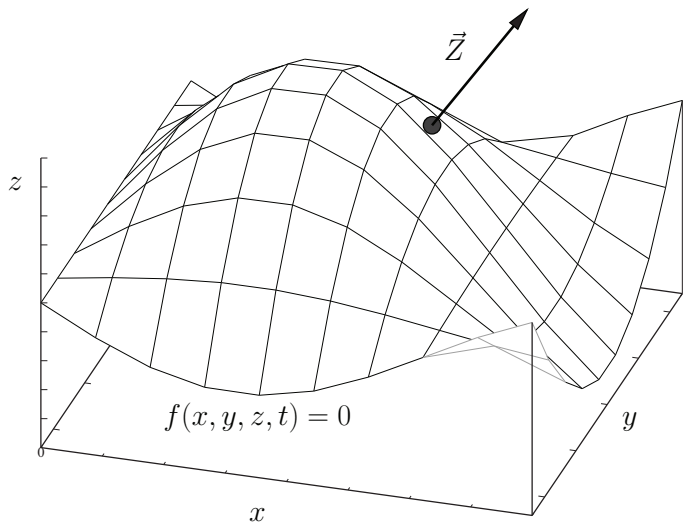


Abbildung 2.4: *Die Zwangskraft $\vec{Z}$ steht zur Zeit t senkrecht auf der Zwangsbedingung $f(x,y,z,t)=0$.*

Flächen.

Diese Grundannahme ist in Abb. 2.4 skizziert. Da der Gradient $\vec{\nabla}\, f(\vec{r})$ senkrecht auf der durch die Gleichung $f(\vec{r})=0$ definierten Fläche steht, folgt aus der Grundannahme eine Zwangskraft $\vec{Z}_j \propto \vec{\nabla}_j\, f_i$. Bei mehreren Nebenbedingungen erhält man entsprechend viele mögliche Beiträge zu der Zwangskraft, die man aufsummieren muß. Wir können somit die Zwangskräfte wie folgt ansetzen

$$\vec{Z}_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \vec{\nabla}_j\, f_i \tag{2.21}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \vec{a}_{i,j}\,. \tag{2.22}$$

An dieser Stelle wurden k freie Parameter λ_i eingeführt, die den Zwangsbedingungen entsprechen. Ein solcher Parameter wurde bereits in (2.17) eingeführt, allerdings wurde er dort mit „Z“ bezeichnet. Die Parameter λ_i müssen später aus den $3\,N$ Bewegungsgleichungen (2.13) für die $3\,N-k$ unabhängigen generalisierten Koordinaten eliminiert werden.

Beim Übergang zu (2.22) haben wir die Definition (2.9) verwendet (mit einer sinngemäßen Zusammenfassung von den generalisierten Koordinaten q_j zu Vektoren). In der Form (2.22) gilt der Ansatz für die Zwangskräfte auch für nicht-holonome Zwangsbedingungen, die sich zwar in der Form (2.8), aber eben nicht in der Form

(2.3) schreiben lassen.

Beispiel 2.2: Wir wenden den Gradient in Polarkoordinaten

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \tag{2.23}$$

auf die Zwangsbedingung (2.5) an und erhalten die Zwangskraft für das ebene mathematische Pendel

$$\vec{Z} = \lambda \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (r - \ell) = \lambda \vec{e}_r = \lambda \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} . \tag{2.24}$$

Die Zwangskraft wirkt also wie erwartet in Richtung des Fadens.

Beispiel 2.3: Hier bietet sich die Verwendung des Gradienten in Zylinderkoordinaten an

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.25}$$

Da es sich bei (2.6) um zwei Zwangsbedingungen handelt, müssen wir die Zwangskraft entsprechend ansetzen:

$$\begin{aligned} \vec{Z} &= \lambda_1 \vec{\nabla} (\varphi - \omega t) + \lambda_2 \vec{\nabla} \left(z - a r^2\right) \\ &= \lambda_1 \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi + \lambda_2 (\vec{e}_z - 2 a r \vec{e}_r) \\ &= \lambda_1 \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 a r \cos\varphi \\ -2 a r \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{2.26}$$

An dieser Stelle kann man die erste Zwangsbedingung aus (2.6) verwenden und $\varphi = \omega t$ einsetzen. Wen der Faktor $1/r$ bei λ_1 stört, kann diesen durch die Umdefinition $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 / r$ absorbieren.

Im Prinzip könnten wir nun die Zwangskräfte (2.24) bzw. (2.26) in die Bewegungsgleichungen (2.13) für die unabhängigen Koordinaten ϑ bzw. r einsetzen. Allerdings sind anschließend noch die Parameter λ bzw. λ_1 und λ_2 zu eliminieren, bevor man eine Bewegungsgleichung erhält, die man lösen kann.

Wir fassen die Überlegungen dieses Unterkapitels zusammen:

(i) Die Zwangsbedingungen werden sichergestellt, indem man Zwangskräfte in die Newtonschen Bewegungsgleichungen einführt, die nun (2.13) lauten.

(ii) Man nimmt ferner an, dass die Zwangskräfte zu jeder Zeit senkrecht auf den durch die Zwangsbedingungen (2.3) definierten Flächen stehen. Die Zwangskräfte können damit als (2.22) angesetzt werden. Dieser Ansatz gilt auch für nicht-holonome Zwangsbedingungen, wenn diese in der differentiellen Form (2.8) geschrieben werden können.

2.4 D'Alembertsches Prinzip

Der in dem letzten Unterkapitel beschrittene Weg, zunächst die Form der Zwangskräfte zu bestimmen und diese anschließend aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren, ist offensichtlich mühselig. Ist die Kenntnis der Zwangskräfte nicht erforderlich, bietet ein d'Alembert zugeschriebenes Prinzip [5] eine Alternative. Wir werden dieses „d'Alembertsche Prinzip" in einer differentiellen Formulierung vorstellen, die auf Lagrange zurückgeht [20]. Zunächst führen wir dazu folgenden Begriff ein:

> Eine *virtuelle Verrückung* $\delta\vec{r}_i$ ist das *instantane* und *infinetisemale* Versetzen eines Punktes entlang einer Richtung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist.

Bei skleronomen Zwangsbedingungen sind virtuelle Verrückungen auch mögliche reale Verrückungen. Bei rheonomen Zwangsbedingungen können die virtuellen Verrückungen hingegen von den realen abweichen, da die virtuellen Verrückungen instantan, d.h. bei eingefrorenen Zwangsbedingungen zu erfolgen haben. Virtuelle Verrückungen zeigen also tangential zu den durch die Zwangesbedingungen definierten Flächen.

Die Annahme aus Unterkapitel 2.3 können wir nun wie folgt formulieren:

> *D'Alembertsches Prinzip:* Zwangskräfte verrichten keine virtuelle Zwangsarbeit, d.h.
>
> $$\sum_{i=1}^{N} \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0\,. \tag{2.27}$$

Bei skleronomen Zwangsbedingungen kann die virtuelle Zwangsarbeit mit real geleisteter Arbeit identifiziert werden. Somit bedeutet das d'Alembertsche Prinzip, dass skleronome Zwangskräfte keine reale Arbeit verrichten können. Rheonome Zwangskräfte können hingegen durchaus reale Arbeit verrichten. Tatsächlich werden rheonome Zwangsbedingungen verwendet, um Energie von einem Antrieb (Motor) auf ein mechanisches Gerät zu übertragen. Die *virtuelle Zwangsarbeit* (2.27) verschwindet jedoch in beiden Fällen.

Das d'Alembertsche Prinzip können wir nun auf die Bewegungsgleichung (2.13) in der Form $m_i\,\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{\text{ges.}} - \vec{Z}_i = \vec{0}$ anwenden: Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\delta\vec{r}_i$ und summieren über i. Aufgrund von (2.27) fällt der letzte Term im Ergebnis

weg, so dass wir die *d'Alembert-Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{\text{ges.}} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{2.28}$$

erhalten. An dieser Stelle ist noch etwas Vorsicht geboten, da aufgrund der Zwangsbedingungen nicht alle Komponenten der $\delta\vec{r}_i$ unabhängig sind. Wir verwenden daher die Parametrisierung

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{3\,N-k}, t)\,, \qquad i = 1, \ldots N \tag{2.29}$$

durch $3\,N - k$ *unabhängige* generalisierte Koordinaten (siehe (2.2)) und erhalten

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3\,N-k} \frac{\partial\,\vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j\,, \qquad i = 1, \ldots N\,. \tag{2.30}$$

Einsetzen von (2.30) in (2.28) führt auf

$$\sum_{j=1}^{3\,N-k} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{\text{ges.}} \right) \cdot \frac{\partial\,\vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0\,. \tag{2.31}$$

Da die δq_j unabhängig sind, können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten $3\,N - k$ Bewegungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{\text{ges.}} \right) \cdot \frac{\partial\,\vec{r}_i}{\partial q_j} = 0\,. \tag{2.32}$$

2.4.1 Zylinder auf schiefer Ebene

Zunächst gilt für den Ortsvektor $\vec{r}_A$ des Aufpunkts des Zylinders aus Beispiel 2.1 als Funktion der unabhängigen Koordinate φ nach (2.4)

$$\vec{r}_A(\varphi) = r\,\varphi \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\,. \tag{2.33}$$

Damit findet man

$$\frac{\partial\,\vec{r}_A}{\partial\varphi} = r \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\,. \tag{2.34}$$

Für die zweite Ableitung nach der Zeit folgt aus (2.33) $\ddot{\vec{r}}_A(\varphi) = r\,\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ (siehe (2.15)). Wir setzen dieses Ergebnis für $\ddot{\vec{r}}_A$, $\partial\,\vec{r}_A/\partial\varphi$ nach (2.34) und die Gravitationskraft $\vec{F} = -m\,g\,\vec{e}_y$ in (2.32) ein:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} m\,r\,\ddot{\varphi}\,\cos\alpha \\ m\,r\,\ddot{\varphi}\,\sin\alpha + m\,g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\,\cos\alpha \\ r\,\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= m\,r^2\,\ddot{\varphi}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + m\,g\,r\,\sin\alpha\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dieses Ergebnis ist äquivalent zu $\ddot{\varphi} = -g \sin\alpha/r$, d.h. wir haben die Bewegungsgleichung (2.19) reproduziert, ohne explizit Zwangskräfte einzuführen.

2.4.2 Mathematisches Pendel

Für den Ortsvektor des Pendels aus Beispiel 2.2 gilt nach den Überlegungen aus Unterkapitel 2.2

$$\vec{r}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \ell \sin\vartheta \\ -\ell\cos\vartheta \end{pmatrix} . \tag{2.36}$$

Damit findet man

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \ell \cos\vartheta \\ \ell \sin\vartheta \end{pmatrix} . \tag{2.37}$$

Für die zweite Ableitung nach der Zeit folgt aus (2.36)

$$\ddot{\vec{r}}(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}(\vartheta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \ell\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ \ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{pmatrix} = \ell\begin{pmatrix} \ddot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta \\ \ddot{\vartheta}\sin\vartheta + \dot{\vartheta}^2\cos\vartheta \end{pmatrix} . \tag{2.38}$$

Wir setzen (2.37), (2.38) und die Gravitationskraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\,g \end{pmatrix}$ in (2.32) ein und finden

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} m\,\ell\,\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - m\,\ell\,\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta \\ m\,\ell\,\ddot{\vartheta}\sin\vartheta + m\,\ell\,\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta + m\,g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell\cos\vartheta \\ \ell\sin\vartheta \end{pmatrix} \\ &= m\,\ell^2\,\ddot{\vartheta} + m\,g\,\ell\sin\vartheta\,, \end{aligned} \tag{2.39}$$

bzw.

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell}\sin\vartheta\,. \tag{2.40}$$

Dies ist die *Bewegungsgleichung* des mathematischen Pendels. Nehmen wir kleine Ausschläge an, so können wir $\sin\vartheta \approx \vartheta$ nähern und erhalten aus (2.40) die *Schwingungsgleichung*

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell}\,\vartheta\,. \tag{2.41}$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung ist bekanntlich

$$\vartheta(t) = A\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) + B\,\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) . \tag{2.42}$$

Wir wollen nun die Lösung der Bewegungsgleichung (2.40) diskutieren. Dazu bringen wir alles auf eine Seite und multiplizieren mit $\dot{\vartheta}$:

$$0 = \dot{\vartheta}\,\left(\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell}\,\sin\vartheta\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left(\frac{1}{2}\,\dot{\vartheta}^2 - \frac{g}{\ell}\,\cos\vartheta\right) . \tag{2.43}$$

Dies ist äquivalent zu $\dot{\vartheta}^2/2 - g/\ell \cos\vartheta = \text{konst.}$, bzw. nach Multiplikation mit $m\,\ell^2$ zu

$$E = \frac{m}{2}\,(\ell\,\dot{\vartheta})^2 - m\,g\,\ell\,\cos\vartheta = \text{konst.} \tag{2.44}$$

An dieser Stelle erkennt man die in Unterkapitel 1.3 hergeleitete Energieerhaltung wieder!

Anmerkungen:

(i) Die Energieerhaltung gilt allgemein für konservartive Kraftfelder und *skleronome* Zwangsbedingungen. Dies folgt daraus, dass reale Verrückungen für sklleronome Zwangsbedingungen auch virtuelle Verrückungen sind und somit das d'Alembertsche Prinzip (2.27) in diesem Fall in der Form

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{r}_i \cdot \vec{Z}_i = 0 \tag{2.45}$$

geschrieben werden kann[2]. Beim Vorliegen von Zwangsbedingungen ist anstelle der Newtonschen Bewegungsgleichung (1.5) nun (2.13) in (1.22) einzusetzen. Allerdings heben sich die Zwangskräfte aufgrund von (2.45) im Endergebnis heraus und die Schlußfolgerungen von Unterkapitel 1.3 können unverändert übernommen werden.

(ii) Gilt Energieerhaltung (d.h. für konservative Kraftfelder und skleronome Zwangsbedingungen), kann man dies verwenden, um schnell *eine* Bewegungsgleichung hinzuschreiben, wie z.B. (2.44) für das mathematische Pendel. Liegt allerdings mehr als ein Freiheitsgrad vor, sind weitere Überlegungen zur Herleitung eines vollständigen Satzes von Bewegungsgleichungen unumgänglich.

Glg. (2.44) kann nach $\dot{\vartheta}$ aufgelöst werden:

$$\frac{\mathrm{d}\,\vartheta}{\mathrm{d}t} = \dot{\vartheta} = \pm\sqrt{\frac{2\,E}{m\,\ell^2} + \frac{2\,g}{\ell}\,\cos\vartheta}\,. \tag{2.46}$$

Diese Gleichung können wir nach Separation der Variablen ϑ und t integrieren und finden

$$\pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{\frac{2\,E}{m\,\ell^2} + \frac{2\,g}{\ell}\,\cos\vartheta}} = t_1 - t_0\,. \tag{2.47}$$

Damit ist das Problem im Prinzip gelöst. Das hier auftretende elliptische Integral kann allerdings nicht elementar ausgedrückt werden, so dass wir keinen elementaren Ausdruck für die Lösung $\vartheta(t)$ der Bewegungsgleichung (2.40) angeben können.

[2]Diese Gleichung bedeutet, dass –wie bereits angemerkt– skleronome Zwangskräfte keine reale Arbeit verrichten.

Wir wollen jedoch die Schwingungsperiode T des mathematischen Pendels etwas genauer analysieren, wobei wir auf eine Entwicklung für kleine Auslenkungen zielen. Dazu betrachten wir die Umkehrpunkte $\pm\vartheta_{\mathsf{u}}$, die durch $\dot\vartheta_{\mathsf{u}} = 0$ charakterisiert sind. Einsetzen in (2.44) liefert $E = -m\,g\,\ell\,\cos\vartheta_{\mathsf{u}}$. Setzen wir dies wieder in (2.47) ein, so erhalten wir für die *Periode*

$$T = 2\int\limits_{-\vartheta_{\mathsf{u}}}^{\vartheta_{\mathsf{u}}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{\frac{2\,g}{\ell}\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_{\mathsf{u}})}} \tag{2.48}$$

Wir ersetzen $\cos(2\,x) = 1 - 2\,\sin^2 x$:

$$T = 2\int\limits_{-\vartheta_{\mathsf{u}}}^{\vartheta_{\mathsf{u}}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{\frac{4\,g}{\ell}\,\left(\sin^2\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}}\,. \tag{2.49}$$

Substitutieren wir weiter

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2}\,\sin\Theta\,, \tag{2.50}$$

so gehen zunächt die Integrationsgrenzen in $\Theta = \pm\pi/2$ über. Ferner erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\,\vartheta}{\mathrm{d}\Theta} = \frac{2\,\sin\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2}\,\cos\Theta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2}\,\sin^2\Theta}}\,. \tag{2.51}$$

Nun setzen wir (2.50) in (2.49) ein, formen um und substitutieren anschließend die Integration mit (2.51):

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_{-\vartheta_{\mathsf{u}}}^{\vartheta_{\mathsf{u}}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2} - \sin^2\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2}\,\sin^2\Theta}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_{-\vartheta_{\mathsf{u}}}^{\vartheta_{\mathsf{u}}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2}\,\cos\Theta} \\ &= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2}\,\sin^2\Theta}}\,. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Schließlich kann man für kleine Ausschläge ϑ_{u} den Integranden mit Hilfe von $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + x/2 + \ldots$ entwickeln:

$$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\Theta\,\left[1 + \frac{1}{2}\,\sin^2\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2}\,\sin^2\Theta + \ldots\right] = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\left[1 + \frac{1}{4}\,\sin^2\frac{\vartheta_{\mathsf{u}}}{2} + \ldots\right]. \tag{2.53}$$

Die führende Ordnung reproduziert die Periode $T = 2\,\pi\,\sqrt{\ell/g}$ der linearisierten Gleichung, siehe (2.42). In dieser Ordnung ist die Periode unabhängig vom Auslenkwinkel ϑ_{u}. Das Ergebnis (2.53) zeigt jedoch, dass es Korrekturen zu dieser einfachsten Näherung gibt, die zu einer Abhängigkeit der Periode T von ϑ_{u} führen.

2.4.3 Perle auf rotierendem Draht

Für den Ortsvektor der Perle aus Beispiel 2.3 gilt nach den Überlegungen um Glg. (2.6):

$$\vec{r}(r) = \begin{pmatrix} r\,\cos(\omega\,t) \\ r\,\sin(\omega\,t) \\ a\,r^2 \end{pmatrix} . \tag{2.54}$$

Damit erhält man

$$\frac{\partial\,\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 2\,a\,r \end{pmatrix} . \tag{2.55}$$

Für die zweite Ableitung nach der Zeit folgt aus (2.54)

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -r\,\omega^2\,\cos(\omega\,t) - 2\,\dot{r}\,\omega\,\sin(\omega\,t) + \ddot{r}\,\cos(\omega\,t) \\ -r\,\omega^2\,\sin(\omega\,t) + 2\,\dot{r}\,\omega\,\cos(\omega\,t) + \ddot{r}\,\sin(\omega\,t) \\ 2\,a\,\dot{r}^2 + 2\,a\,r\,\ddot{r} \end{pmatrix} . \tag{2.56}$$

Nun setzt man wie gehabt (2.55), (2.56) und die Gravitationskraft $\vec{F} = -m\,g\,\vec{e}_z$ in (2.32) ein:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} -r\,\omega^2\,\cos(\omega\,t) - 2\,\dot{r}\,\omega\,\sin(\omega\,t) + \ddot{r}\,\cos(\omega\,t) \\ -r\,\omega^2\,\sin(\omega\,t) + 2\,\dot{r}\,\omega\,\cos(\omega\,t) + \ddot{r}\,\sin(\omega\,t) \\ 2\,a\,\dot{r}^2 + 2\,a\,r\,\ddot{r} + g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 2\,a\,r \end{pmatrix} \\ &= \left(1 + 4\,a\,r^2\right)\,\ddot{r} + 4\,a\,r\,\dot{r}^2 + \left(2\,a\,g - \omega^2\right)\,r\,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Hiermit haben wir die Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate r der Perle auf dem rotierenden Draht hergeleitet. Wir wollen sie allerdings an dieser Stelle nicht lösen. Beachtenswert ist ferner, dass es sich hier um eine *rheonome* Zwangsbedingung handelt, bei der von außen Energie zugeführt wird. Insofern ist bei Energiebetrachtungen Vorsicht geboten. Man kann zwar ein effektives Potential einführen (siehe Unterkapitel 3.1.3) und aus diesem die Bewegungsgleichung (2.57) ableiten, eine naive Betrachtung ist jedoch fehleranfällig.

3 Lagrangesche Mechanik

Nach den Überlegungen zu den Zwangskräften im letzten Kapitel soll nun eine elegantere Formulierung der Mechanik vorgestellt werden, die auf Lagrange zurückgeht [20].

3.1 Lagrangegleichungen 2. Art

Wir beginnen mit den sogenannten „Lagrangegleichungen 2. Art“, die Lagrange (ca. 1800) zugeschrieben werden, auch wenn sie in der hier vorgestellten Formulierung in der Originalveröffentlichung [20] praktisch nicht wiederzuerkennen sind (die Wiedererkennung wird u.a. dadurch erschwert, dass Lagrange seine Gleichungen in deutlich expliziterer Form angibt, als es heute üblich ist). Diese Gleichungen werden es uns erlauben, für recht allgemeine Situationen sofort Bewegungsgleichungen für die unabhängigen generalisierten Koordinaten aufzustellen. Wie wir in Unterkapitel 3.1.5 zeigen werden, gelten die Lagrangegleichungen 2. Art auch in krummlinigen und sogar beschleunigten Bezugssystemen. Dies ist ein großer Vorteil gegenüber den Newtonschen Bewegungsgleichungen (1.24), die nur in Inertialsystemen und für kartesische Koordinaten gelten.

Im Sinn von (2.2) parametrisieren wir zunächst die N Ortsvektoren $\vec{r}_i$ in kartesischen Koordinaten durch n generalisierte Koordinaten q_j (zunächst nicht notwendig unabhängig)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t)\,, \qquad i = 1, \ldots N\,. \tag{3.1}$$

Ferner verwenden wir die d'Alembert-Gleichung für diese n Koordinaten q_j in der Form (2.31), d.h.

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{\text{ges.}} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0\,. \tag{3.2}$$

Der zweite Term dieser Gleichung kann durch die sogenannten *generalisierten Kräfte*

$$Q_j := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ges.}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{3.3}$$

ausgedrückt werden. Der Grund für die Einführung der Q_j wird etwas weiter unten klar werden.

Wir wenden uns zunächst dem ersten Term von (3.2) zu und nehmen konstante Massen m_i an:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j\,. \tag{3.4}$$

Einerseits gilt aufgrund von (3.1)

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\,, \tag{3.5}$$

womit folgt

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,. \tag{3.6}$$

Andererseits folgt aus (3.5)

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\, \partial q_l}\, \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\, \partial t} = \sum_{l=1}^{n} \dot{q}_l\, \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l\, \partial q_j} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t\, \partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,, \tag{3.7}$$

wobei wir angenommen haben, dass die zweiten Ableitungen vertauschen.

Als nächstes setzen wir (3.6) und (3.7) in (3.4) ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} m_i\, \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j &= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_i\, \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i\, \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, \vec{v}_i^{\,2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, \vec{v}_i^{\,2} \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j\,,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

mit der bereits in (1.26) definierten kinetischen Energie

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, \vec{v}_i^{\,2}\,. \tag{3.9}$$

Schließlich setzen wir (3.8) und (3.3) in (3.2) ein:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0\,. \tag{3.10}$$

Nehmen wir nun an, dass die Koordinaten q_j *unabhängig* sind ($n = 3\,N - k$), so können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen und finden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0\,, \qquad j = 1, \ldots 3\,N - k\,. \tag{3.11}$$

Diese Gleichungen gelten für beliebige eingeprägte generalisierte Kräfte Q_j; vorausgesetzt wird lediglich, dass die Zwangsbedingungen *holonom* sind.

Von besonderer Bedeutung sind Kräfte, die im Sinn von (1.25) als Gradient eines Potentials geschrieben werden können, d.h.

$$\vec{F}_i^{\text{ges.}}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t)\,. \tag{3.12}$$

Die generalisierten Kräfte (3.3) lauten damit

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{ges.}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t)\,. \tag{3.13}$$

Drücken wir das Potential durch die $3\,N-k$ unabhängigen generalisierten Koordinaten q_j anstelle der kartesischen Koordinaten $\vec{r}_i$ aus, so können wir dieses Ergebnis als

$$Q_j = -\frac{\partial V(q_1, \ldots, q_{3\,N-k}, t)}{\partial q_j} \tag{3.14}$$

schreiben. An dieser Stelle können wir zu Kräften verallgemeinern, die sich gemäß

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \tag{3.15}$$

aus einem geschwindigkeitsabhängigen „*generalisierten*“ Potential[3]

$$V = V(q_1, \ldots, q_{3\,N-k}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3\,N-k}, t) \tag{3.16}$$

ableiten lassen.

Wir definieren die *Lagrangefunktion*

$$L := T - V\,. \tag{3.17}$$

Die Gleichung (3.11) läßt sich mit (3.15) und (3.17) nun als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \qquad j = 1, \ldots 3\,N - k \tag{3.18}$$

schreiben. Dies sind die sogenannten *Lagrangegleichungen 2. Art*, die unser erstes zentrales Ergebnis darstellen. Sie gelten für *holonome* Zwangsbedingungen und Kräfte, die nach (3.15) aus einem Potential abgeleitet werden können.

Es ist nicht schwer, aus (3.18) die d'Alembert-Gleichung (3.2) zurückzugewinnen. Die d'Alembert-Gleichung und die Lagrangegleichungen 2. Art sind also für Kräfte der Form (3.15) äquivalent.

Bewegungsgleichungen können im Lagrange-Formalismus 2. Art nach folgendem Rezept aufgestellt werden:

[3] Ein wichtiges geschwindigkeitsabhängiges Potential taucht in der Elektrodynamik auf. Es verursacht die elektromagnetische Kraft auf ein Teilchen der Ladung q, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, und lautet $V = q\left(\Phi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)$ mit dem skalaren Potential Φ und dem Vektorpotential $\vec{A}$.

(i) Schreibe $L = T - V$ als Funktion von $3\,N$ geeigneten generalisierten Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten.

(ii) Verwende die k holonomen Nebenbedingungen, um die $3\,N$ Koordinaten durch $3\,N - k$ unabhängige Koordinaten auszudrücken und setze diese in die Lagrangefunktion ein.

(iii) Stelle die Lagrangegleichungen (3.18) auf.

3.1.1 Zylinder auf schiefer Ebene

Wir wenden den Formalismus als erstes auf Beispiel 2.1 an. Zunächst gilt für die kinetische Energie des Zylinders

$$T = \frac{m}{2}\,v^2 = \frac{m}{2}\,(r\,\dot{\varphi})^2\ . \tag{3.19}$$

Andererseits gilt für die potentielle Energie (mit $y_0 = r\,\cos\alpha$)

$$V = m\,g\,(y_A + y_0) = m\,g\,(r\,\varphi\,\sin\alpha + y_0)\,, \tag{3.20}$$

wobei wir (2.4) verwendet haben. Damit haben wir die Lagrangefunktion

$$L(\varphi,\dot{\varphi}) = T - V = \frac{m}{2}\,(r\,\dot{\varphi})^2 - m\,g\,(r\,\varphi\,\sin\alpha + y_0) \tag{3.21}$$

und die Lagrangegleichung (3.18) lautet

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\,L}{\partial\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,m\,r^2\,\dot{\varphi} + m\,g\,r\,\sin\alpha = m\,r^2\,\ddot{\varphi} + m\,g\,r\,\sin\alpha\,. \tag{3.22}$$

Nach Division durch $m\,r^2$ erkennt man hier die bereits bekannte Bewegungsgleichung (2.19) wieder.

3.1.2 Mathematisches Pendel

Zunächst gilt für die kinetische Energie des mathematischen Pendels aus Beispiel 2.2

$$T = \frac{m}{2}\,v^2 = \frac{m}{2}\,\left(\ell\,\dot{\vartheta}\right)^2\ . \tag{3.23}$$

Andererseits gilt für die potentielle Energie

$$V = m\,g\,z = -m\,g\,\ell\,\cos\vartheta\,. \tag{3.24}$$

Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L(\vartheta,\dot{\vartheta}) = T - V = \frac{m}{2}\,\left(\ell\,\dot{\vartheta}\right)^2 + m\,g\,\ell\,\cos\vartheta\,. \tag{3.25}$$

Die Lagrangegleichung (3.18) führt also auf folgende Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, m\,\ell^2\,\dot{\vartheta} + m\,g\,\ell\,\sin\vartheta = m\,\ell^2\,\ddot{\vartheta} + m\,g\,\ell\,\sin\vartheta\,. \tag{3.26}$$

Auch hier erkennen wir eine bereits bekannte Bewegungsgleichung wieder, nämlich (2.39).

3.1.3 Perle auf rotierendem Draht

Im homogenen Gravitationsfeld lautet die potentielle Energie der Perle

$$V = m\,g\,z = m\,g\,a\,r^2\,. \tag{3.27}$$

Wir benötigen ferner die kinetische Energie der Perle. Dazu leiten wir (2.54) zunächst einmal nach der Zeit t ab:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\,\cos(\omega\,t) - r\,\omega\,\sin(\omega\,t) \\ \dot{r}\,\sin(\omega\,t) + r\,\omega\,\cos(\omega\,t) \\ 2\,a\,r\,\dot{r} \end{pmatrix}\,. \tag{3.28}$$

Damit lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\,\vec{v}^2 = \frac{m}{2}\,\left(\dot{r}^2 + \omega^2\,r^2 + 4\,a^2\,r^2\,\dot{r}^2\right) \tag{3.29}$$

und zusammen mit (3.27) die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{m}{2}\,\left(1 + 4\,a^2\,r^2\right)\,\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\,\left(\omega^2 - 2\,g\,a\right)\,r^2\,. \tag{3.30}$$

Offensichtlich hat diese Lagrangefunktion die gleiche Form wie für einen in der Ebene fest stehenden parabelförmig gebogenen Draht ($\omega = 0$). Diese Analogie legt die Zerlegung der Lagrangefunktion (3.30) in eine effektive kinetische Energie und ein effektives Potential nahe

$$T_{\text{eff.}} = \frac{m}{2}\,\left(1 + 4\,a^2\,r^2\right)\,\dot{r}^2\,, \qquad V_{\text{eff.}} = \frac{m}{2}\,\left(2\,g\,a - \omega^2\right)\,r^2\,, \tag{3.31}$$

wobei die Zentrifugalkraft zu einer Reduktion des Gravitationspotentials führt.

Die Lagrangegleichung (3.18) führt mit (3.30) auf folgende Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, m\,\left(1 + 4\,r\,a^2\,r^2\right)\,\dot{r} - m\,4\,a\,r\,\dot{r}^2 + m\left(2\,g\,a - \omega^2\right)\,r \\ &= m\,\left(1 + 4\,r\,a^2\,r^2\right)\,\ddot{r} + m\,4\,a\,r\,\dot{r}^2 + m\left(2\,g\,a - \omega^2\right)\,r\,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Nach Division durch die Masse m reproduzieren wir also hier die Bewegungsgleichung (2.57), die wir bereits aus dem d'Alembertschen Prinzip hergeleitet haben.

Wir wollen uns nun der Lösung dieser Bewegungsgleichung zuwenden. Zunächst kann man die Frage stellen, ob eine Lösung existiert, bei der die Perle bei einem festen Radius verharrt. In diesem Fall wäre $\dot{r} = 0$ und somit auch $\ddot{r} = 0$. Setzt man dies in (2.57) bzw. (3.32) ein, so finden man $(2\,g\,a - \omega^2)\; r = 0$, d.h. die Perle kann nur im Ursprung $r = 0$ sitzen bleiben.

Allgemeiner löst man die Bewegungsgleichung (2.57) bzw. (3.32) wie folgt. Wir multiplizieren zunächst (2.57) mit $\dot{r}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{r}\,\left[\left(1+4\,a\,r^2\right)\,\ddot{r} + 4\,a\,r\,\dot{r}^2 + \left(2\,a\,g - \omega^2\right)\,r\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left[\left(1+4\,a\,r^2\right)\,\dot{r}^2 + \left(2\,a\,g - \omega^2\right)\,r^2\right] \\ &= \frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left(T_{\text{eff.}} + V_{\text{eff.}}\right) \end{aligned} \tag{3.33}$$

mit der effektiven kinetischen Energie und dem effektiven Potential aus (3.31). Wir haben somit die Erhaltung der effektiven Gesamtenergie $E_{\text{eff.}} = T_{\text{eff.}} + V_{\text{eff.}}$ hergeleitet, d.h.

$$\left(1+4\,a^2\,r^2\right)\,\dot{r}^2 - \left(\omega^2 - 2\,g\,a\right)\,r^2 = \frac{2\,E_{\text{eff.}}}{m}\,. \tag{3.34}$$

Dieses Ergebnis kann man nun nach $\dot{r}$ auflösen und nach Separation der Variablen integrieren:

$$\int \mathrm{d}t\,t = \pm \int \mathrm{d}r\,\sqrt{\frac{1+4\,a^2\,r^2}{\frac{2\,E_{\text{eff.}}}{m} + \left(\omega^2 - 2\,g\,a\right)\,r^2}}\,, \tag{3.35}$$

wobei für $\dot{r} > 0$ (< 0) das positive (negative) Vorzeichen zu nehmen ist.

3.1.4 Zwei Perlen auf Drähten mit Feder

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die in Abb. 3.1 skizzierte Situation: Zwei Perlen der Massen m_1 und m_2 gleiten auf zwei im Abstand d parallel gespannten Drähten. Die Koordinaten entlang der Drähte bezeichnen wir mit x_1 bzw. x_2. Die Perlen seien durch eine Feder verbunden, die eine Ruhelänge d besitze. Bezeichnen wir die Abweichung der Federlänge von der Ruhelänge mit ϵ, so gilt zunächst

$$\epsilon = \sqrt{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2} - d = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + d^2} - d\,. \tag{3.36}$$

Damit lautet das Potential

$$V = \frac{k}{2}\,\epsilon^2 = \frac{k}{2}\,\left(\left(x_1 - x_2\right)^2 - 2\,d\,\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + d^2} + 2\,d^2\right)\,, \tag{3.37}$$

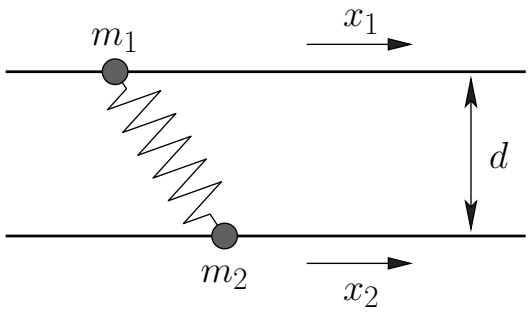


Abbildung 3.1: *Zwei Massen m_1, m_2 gleiten auf im Abstand d parallel gespannten Drähten. Die beiden Massen sind durch eine Feder verbunden.*

wobei wir die Federkonstante mit k bezeichnet haben.

Die kinetische Energie können ist hier besonders einfach. Wir können deswegen die Lagrangefunktion sofort angeben

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}\,\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}\,(x_1 - x_2)^2 + k\,d\,\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + d^2} - k\,d^2\,. \quad (3.38)$$

Mit Hilfe von (3.18) finden wir die Bewegungsgleichungen

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} \;=\; m_1\,\ddot{x}_1 + k\,(x_1 - x_2) - k\,d\,\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + d^2}}\,, \quad (3.39)$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} \;=\; m_2\,\ddot{x}_2 - k\,(x_1 - x_2) + k\,d\,\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + d^2}}\,. \quad (3.40)$$

Zunächst kann man (3.39) und (3.40) addieren und findet $m_1\,\ddot{x}_1 + m_2\,\ddot{x}_2 = 0$. Somit ist der *Schwerpunktimpuls* $p = p_1 + p_2 = m_1\,\dot{x}_1 + m_2\,\dot{x}_2$ erhalten.

Ferner kann man (3.39) mit $m_2/(m_1+m_2)$ multiplizieren sowie (3.40) mit $m_1/(m_1+m_2)$, beides voneinander abziehen und findet

$$0 = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k\,(x_1 - x_2) - k\,d\,\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + d^2}}\,. \quad (3.41)$$

Führen wir die *reduzierte Masse*

$$\mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.42)$$

ein, so finden wir für die *Relativkoordinate*

$$x = x_1 - x_2 \quad (3.43)$$

die Bewegungsgleichung

$$0 = \mu\,\ddot{x} + k\,x - k\,d\,\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\,. \tag{3.44}$$

Auch diese Gleichung kann in bekannter Weise durch Multiplikation mit $\dot{x}$ und Separation der Variablen integriert werden. Ferner bietet sich eine Entwicklung für kleine x an.

3.1.5 Forminvarianz

Im Gegensatz zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen (1.24) besitzen die Lagrangegleichungen 2. Art (3.18) die nützliche Eigenschaft, invariant unter Punkttransformationen

$$q_i \mapsto \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, \ldots, q_{3\,N-k}, t) \tag{3.45}$$

zu sein. Man kann (3.18) somit sofort in krummlinigen Koordinaten oder sogar in beschleunigten Bezugssystemen verwenden. Selbst bei der d'Alembert-Gleichung (2.32) muß man hingegen zunächst den Weg über kartesische Koordinaten in einem Inertialsystem gehen.

Man könnte sich bei dieser Aussage auf die Wahlfreiheit der q_j bei der Herleitung von (3.18) berufen. Wir wollen die behauptete Forminvarianz jedoch explizit zeigen. Dazu betrachten wir zunächst die Umkehrung von (3.45)

$$q_i = q_i(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{3\,N-k}, t)\,. \tag{3.46}$$

Die totale Ableitung nach t lautet folglich

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{3\,N-k} \frac{\partial\, q_i}{\partial \tilde{q}_j}\,\dot{\tilde{q}}_i + \frac{\partial q_i}{\partial t}\,. \tag{3.47}$$

Damit findet man

$$\frac{\partial\,\dot{q}_i}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} = \frac{\partial\, q_i}{\partial \tilde{q}_j}\,. \tag{3.48}$$

Als nächstes setzt man (3.46) in die alte Lagrangefunktion $L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$ ein, d.h. man betrachtet $L(\{q_i(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_{3\,N-k},t)\},\{\dot{q}_i(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_{3\,N-k},\dot{\tilde{q}}_1,\ldots,\dot{\tilde{q}}_{3\,N-k},t)\},t)$ als Funktion der neuen Variablen $\tilde{q}_i$ und ihrer Ableitungen $\dot{\tilde{q}}_i$. Damit findet man für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\, L}{\partial \tilde{q}_j} = \sum_{i=1}^{3\,N-k}\left[\frac{\partial\, L}{\partial q_i}\,\frac{\partial\, q_i}{\partial \tilde{q}_j} + \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial\,\dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_j}\right], \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial\, L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} = \sum_{i=1}^{3\,N-k}\frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial\,\dot{q}_i}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} = \sum_{i=1}^{3\,N-k}\frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial\, q_i}{\partial \tilde{q}_j}\,, \tag{3.50}$$

wobei wir im letzten Schritt (3.48) verwendet haben.

Wir benötigen ferner eine Variante von (3.7). Dazu leiten wir (3.47) partiell nach $\tilde{q}_j$ ab:

$$\frac{\partial\,\dot{q}_i}{\partial\tilde{q}_j} = \sum_{l=1}^{3\,N-k} \frac{\partial^2\,q_i}{\partial\tilde{q}_j\,\partial\tilde{q}_l}\,\dot{\tilde{q}}_l + \frac{\partial^2\,q_i}{\partial\tilde{q}_j\,\partial t} = \sum_{l=1}^{3\,N-k} \dot{\tilde{q}}_l\,\frac{\partial^2\,q_i}{\partial\tilde{q}_l\,\partial\tilde{q}_j} + \frac{\partial^2\,q_i}{\partial t\,\partial\tilde{q}_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\tilde{q}_j}\,. \tag{3.51}$$

Nun betrachten wir die totale zeitliche Ableitung von (3.50)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{\tilde{q}}_j} &= \sum_{i=1}^{3\,N-k}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\tilde{q}_j} + \frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\tilde{q}_j}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{3\,N-k}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\tilde{q}_j} + \frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\frac{\partial\,\dot{q}_i}{\partial\tilde{q}_j}\right]\,,\end{aligned} \tag{3.52}$$

wobei im zweiten Schritt gemäß (3.51) die totale zeitliche Ableitung mit der partiellen Ableitung nach $\tilde{q}_j$ vertauscht wurde.

Schließlich kombinieren wir (3.49) und (3.52) zu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{\tilde{q}}_j} - \frac{\partial\,L}{\partial\tilde{q}_j} &= \sum_{i=1}^{3\,N-k}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\tilde{q}_j} + \frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\frac{\partial\,\dot{q}_i}{\partial\tilde{q}_j} - \frac{\partial\,L}{\partial q_i}\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\tilde{q}_j} - \frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\frac{\partial\,\dot{q}_i}{\partial\tilde{q}_j}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{3\,N-k}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\,L}{\partial q_i}\right]\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\tilde{q}_j} = 0\,,\end{aligned} \tag{3.53}$$

wobei wir im letzten Schritt die Lagrangegleichungen (3.18) für die Koordinaten q_i verwendet haben. Wir haben somit gezeigt, dass dieselben Gleichungen für die transformierten Variablen $\tilde{q}_i$ gelten! Natürlich sieht die Lagrangefunktion L selbst in unterschiedlichen Koordinaten unterschiedlich aus, so dass man auch verschiedene Bewegungsgleichungen erhält. Die Lagrangegleichungen (3.18) haben jedoch für jedes System von $3\,N-k$ unabhängigen Koordinaten die gleiche Form!

3.2 Lagrangegleichungen 1. Art

Im vorangegangenen Unterkapitel haben wir den Lagrange-Formalismus 2. Art vorgestellt. Aufgrund seiner besonderen Bedeutung haben wir ihn vorgezogen, wir wollen aber nun den Lagrange-Formalismus 1. Art nachholen.

Der Lagrange-Formalismus 2. Art ist besonders elegant, da er den expliziten Umgang mit Zwangsbedingungen bzw. Zwangskräften vermeidet. Manchmal ist eine Kenntnis der Zwangskräfte jedoch wichtig, um z.B. die mechanische Belastbarkeit der

einschränkenden Konstruktion richtig auszulegen. Ferner sind die Lagrangegleichungen 2. Art (3.18) nur für holonome Zwangsbedingungen anwendbar. Der Lagrange-Formalismus 1. Art erweitert das Anwendungsgebiet auf nicht-holonome Zwangsbedingungen, die sich in der differentiellen Form (2.8) schreiben lassen.

Als Ausgangspunkt verwenden wir (3.10), wobei wir $n = 3\,N$ generalisierte Koordinaten q_j verwenden:

$$\sum_{j=1}^{3\,N} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\, T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0\,. \tag{3.54}$$

Ferner nehmen wir an, dass sich die generalisierten Kräfte Q_j nach (3.15) aus einem Potential herleiten lassen. Elimination der Q_j aus (3.54) führt damit auf folgende Gleichung für die Lagrangefunktion $L = T - V$

$$\sum_{j=1}^{3\,N} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\, L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0\,. \tag{3.55}$$

Da L nun eine Funktion der $3\,N$ abhängigen Koordinaten q_j ist, müssen als nächstes die k Nebenbedingungen implementiert werden. Wir verwenden dazu die differentiellen Nebenbedingungen (2.8) in der Form

$$\sum_{j=1}^{3\,N} a_{i,j}\,\mathrm{d}q_j + a_{i,t}\,\mathrm{d}t = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, k\,. \tag{3.56}$$

Zur Erinnerung: Für holonome Zwangsbedingungen können die $a_{i,j}$ und $a_{i,t}$ nach (2.9) bestimmt werden, es gibt jedoch auch nicht-holonome Zwangsbedingungen, die sich in der Form (3.56) schreiben lassen.

Nun wenden wir (3.56) auf virtuelle Verrückungen an. Da virtuelle Verrückungen instantan erfolgen, ist $\delta t = 0$, so dass wir

$$\sum_{j=1}^{3\,N} a_{i,j}\,\delta q_j = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, k \tag{3.57}$$

finden. Wir addieren dieses Ergebnis nun mit k sogenannten „*Lagrange-Multiplikatoren*“ λ_i zu (3.55) und finden

$$\sum_{j=1}^{3\,N} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\, L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_{i,j} \right] \delta q_j = 0\,. \tag{3.58}$$

An dieser Stelle wählen wir $3\,N - k$ unabhängige Koordinaten aus den q_j aus. Nach Umnummerierung können wir annehmen, dass $q_1, \ldots, q_{3\,N-k}$ die unabhängigen Koordinaten sind. Damit sind die Variationen δq_j mit $j \leq 3\,N - k$ unabhängig und die

δq_j mit $j > 3\,N - k$ können durch $\delta q_1, \ldots, \delta q_{3\,N-k}$ ausgedrückt werden. Wir spalten die Summe in (3.58) entsprechend auf:

$$\sum_{j=1}^{3\,N-k} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\, L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_{i,j} \right] \delta q_j + \sum_{j=3\,N-k+1}^{3\,N} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\, L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_{i,j} \right] \delta q_j = 0\,. \tag{3.59}$$

Diese Aufspaltung kann folgendermaßen genutzt werden:

1. Man *wählt* die k Parameter λ_i so, dass jeder der k Terme in den eckigen Klammern des zweiten Summanden einzeln verschwindet.

2. Anschließend kann man für den ersten Term einen Koeffizientenvergleich der $3\,N - k$ unabhängigen Variationen $\delta q_1, \ldots, \delta q_{3\,N-k}$ durchführen und folgert, dass auch jeder der $3\,N - k$ Terme in den eckigen Klammern des ersten Summanden einzeln verschwinden muß.

Somit führt (3.59) auf folgende Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\, L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_{i,j}\,, \qquad j = 1, \ldots 3\,N\,. \tag{3.60}$$

Dies sind die sogenannten *Lagrangegleichungen 1. Art*, zumindest in der Nomenklatur von [17,18,25]. Die rechte Seite von (3.60) definiert die *generalisierte Zwangskraft*[4]

$$Z_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_{i,j}\,. \tag{3.61}$$

Aus (3.60) erhält man $3\,N$ Gleichungen für die $3\,N + k$ Unbekannten q_j, $j = 1, \ldots, 3\,N$ und λ_i, $i = 1, \ldots, k$. Nimmt man schließlich die k Zwangsbedingungen (3.56) hinzu, so erhält man ein vollständiges Gleichungssystem für alle Unbekannten.

Bewegungsgleichungen in Form eines Systems von $3\,N$ gewöhnlichen Differentialgleichungen können im Lagrange-Formalismus 1. Art nach folgendem Rezept aufgestellt werden:

(i) Nach Wahl von $3\,N$ geeigneten generalisierten Koordinaten werden die Zwangsbedingungen (3.56) aufgestellt.

[4] Für kartesische Koordinaten ist dies tatsächlich die Zwangskraft, siehe (2.22).

(ii) Schreibe $L = T - V$ als Funktion aller $3\,N$ generalisierten Koordinaten q_j und ihrer $3\,N$ Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$.

(iii) Stelle die $3\,N$ Lagrangegleichungen (3.60) auf.

(iv) Eliminiere die k Lagrange-Multiplikatoren λ_i unter Verwendung von (3.60) und (3.56).

Als einen Spezialfall kann man kartesische Koordinaten betrachten. Für die kinetische Energie (3.9) gilt aufgrund ihrer Definition

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j}\right] T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_j}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\,\vec{v}_i^{\,2} = m_j\,\dot{\vec{v}}_j = \dot{\vec{p}}_j\,, \tag{3.62}$$

wobei der Impuls $\vec{p}_j$ entsprechend (1.4) eingeführt wurde.

Andererseits gilt für das Potential $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ eines konservativen Kraftfeldes

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j}\right] V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j} = \vec{F}_j^{\,\text{ges.}}\,, \tag{3.63}$$

wobei (1.25) als Spezialfall von (3.14) eingesetzt wurde.

Setzt man (3.62) und (3.63) in (3.60) ein und faßt die $a_{i,j}$ passend zu Vektoren zusammen, so findet man

$$\dot{\vec{p}}_j - \vec{F}_j^{\,\text{ges.}} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\vec{a}_{i,j}\,, \qquad j = 1, \ldots N\,. \tag{3.64}$$

Einige Autoren [8,14] bezeichnen diesen Spezialfall als Lagrangegleichungen 1. Art. Tatsächlich kann man diese Gleichungen mit Grundgleichungen aus dem Unterkapitel (2.3) identifizieren: Setzt man (2.22) in (2.13) ein, so erhält man (3.64).

3.2.1 Mathematisches Pendel

Für das Beispiel 2.2 soll die Zwangskraft berechnet werden. Für die Zwangsbedingung (2.5), d.h. $f(\vartheta, r) = r - \ell = 0$ gilt nach (2.9)

$$a_\vartheta = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = 0\,, \qquad a_r = \frac{\partial f}{\partial r} = 1 \tag{3.65}$$

(man findet ferner $a_t = \frac{\partial f}{\partial t} = 0$, allerdings benötigen wir dies im folgenden nicht).

Für die Lagrangefunktion gilt mit den beiden Koordinaten ϑ, r

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}, r, \dot{r}) = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\vartheta}^2\right) + m\,g\,r\,\cos\vartheta\,. \tag{3.66}$$

Hier ist zu beachten, dass die Zwangsbedingungen noch nicht eingesetzt werden dürfen, d.h. man darf die Lagrangefunktion *nicht* in der Form (3.25) schreiben.

Die Lagrangegleichungen 1. Art (3.60) führen nun auf folgende Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m r^2 \ddot{\vartheta} + 2 m \dot{r} r \dot{\vartheta} + m g r \sin\vartheta = \lambda a_\vartheta = 0\,, \tag{3.67}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m \ddot{r} - m r \dot{\vartheta}^2 - m g \cos\vartheta = \lambda a_r = \lambda\,. \tag{3.68}$$

Nun setzen wir die Zwangsbedingung $r = \ell$ ein. Unter Berücksichtigung von $\dot{r} = 0$ wird zunächst aus (3.67)

$$m \ell^2 \ddot{\vartheta} + m g \ell \sin\vartheta = 0\,. \tag{3.69}$$

Dies ist identisch zu der Bewegungsgleichung (3.26) die wir bereits mit dem Lagrange-Formalismus 2. Art hergeleitet haben, und damit auch äquivalent zur bekannten Bewegungsgleichung (2.39).

Setzt man $r = \ell$ und $\ddot{r} = 0$ in (3.68) ein, so findet man

$$\lambda = -m \ell \dot{\vartheta}^2 - m g \cos\vartheta\,. \tag{3.70}$$

Aus dieser Gleichung können wir $\dot{\vartheta}^2$ mit Hilfe der Erhaltung der Gesamtenergie (2.44), d.h. $E = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2 - m g \ell \cos\vartheta$ eliminieren. Wir setzen $m \ell \dot{\vartheta}^2 = 2E/\ell + 2 m g \cos\vartheta$ in (3.70) ein und finden

$$\lambda = -\frac{2E}{\ell} - 3 m g \cos\vartheta\,. \tag{3.71}$$

Bei bekannter Energie E liefert dies den Betrag der Zwangskraft als Funktion des Winkels ϑ. Sucht man hingegen die Zwangskraft als Funktion der Zeit t, ist es unumgänglich, eine Lösung $\vartheta(t)$ zu bestimmen, die z.B. in (3.70) eingesetzt werden kann.

3.2.2 Reifen auf einer Ebene

Wir betrachten einen Reifen vom Radius r, dessen gesamte Masse m an seinem Rand konzentriert ist. Dieser Reifen rolle wie in Abb. 3.2 skizziert ohne Schlupf senkrecht stehend auf der x-y-Ebene. Die Koordinaten des Kontaktpunktes seien x_A bzw. y_A und der Orientierungswinkel des Reifens ψ. Ferner bezeichnen wir die Orientierung der Reifen-Ebene relativ zu der x-Achse mit dem Winkel φ.

Hier liegen nicht-holonome Zwangsbedingungen vor, die wir jedoch in der Form (3.56) schreiben können:

$$\mathrm{d}x_A + r\,\mathrm{d}\psi\,\cos\varphi = 0\,, \tag{3.72}$$

$$\mathrm{d}y_A + r\,\mathrm{d}\psi\,\sin\varphi = 0\,. \tag{3.73}$$

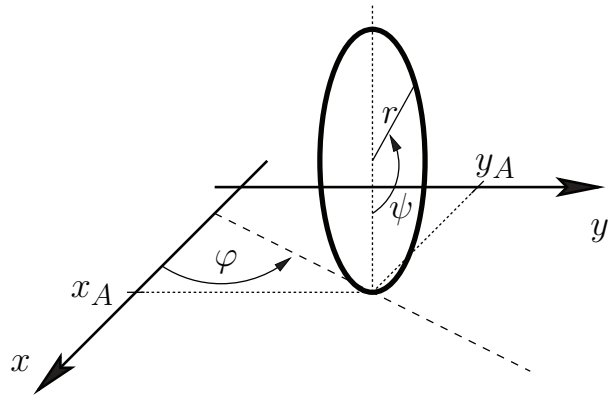


Abbildung 3.2: *Ein Reifen mit Radius r rollt ohne Schlupf senkrecht auf der x-y-Ebene.*

Damit lesen wir $a_{1,x_A} = a_{2,y_A} = 1$, $a_{1,\psi} = r\,\cos\varphi$, $a_{2,\psi} = r\,\sin\varphi$ ab und alle anderen $a_{i,j}$ verschwinden.

Zunächst müssen wir die kinetische Energie ausrechnen. Dazu parameterisieren wir die Punkte $\vec{r}_\alpha$ auf dem Rand des Reifens mit einem Winkel $0 \leq \alpha < 2\,\pi$:

$$\vec{r}_\alpha = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin(\alpha+\psi) \\ \sin\varphi\,\sin(\alpha+\psi) \\ 1+\cos(\alpha+\psi) \end{pmatrix} . \tag{3.74}$$

Damit finden wir die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha = \begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\sin(\alpha+\psi) + \dot{\psi}\,\cos\varphi\,\cos(\alpha+\psi) \\ \dot{\varphi}\,\cos\varphi\,\sin(\alpha+\psi) + \dot{\psi}\,\sin\varphi\,\cos(\alpha+\psi) \\ -\dot{\psi}\,\sin(\alpha+\psi) \end{pmatrix} , \tag{3.75}$$

sowie deren Betragsquadrat

$$\begin{aligned} \vec{v}_\alpha^{\,2} \;=\; & \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 \\ & +2\,\dot{x}_A\,r\,\Big(-\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\sin(\alpha+\psi) + \dot{\psi}\,\cos\varphi\,\cos(\alpha+\psi)\Big) \\ & +2\,\dot{y}_A\,r\,\Big(\dot{\varphi}\,\cos\varphi\,\sin(\alpha+\psi) + \dot{\psi}\,\sin\varphi\,\cos(\alpha+\psi)\Big) \\ & +r^2\,\Big(\dot{\varphi}^2\,\sin^2(\alpha+\psi) + \dot{\psi}^2\Big) . \end{aligned} \tag{3.76}$$

Wir summieren nun die Beiträge der Reifensegmente, indem wir über den Winkel α integrieren. Einerseits verschwinden aufgrund von $\int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\alpha\,\sin\alpha = 0 = \int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\alpha\,\cos\alpha$ sowohl die Beiträge der zweiten und der dritten Zeile von (3.76). Andererseits vereinfacht sich aufgrund von $\int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\alpha\,\sin^2\alpha = \pi$ der Beitrag der vierten Zeile von (3.76).

Insgesamt finden wir

$$\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\alpha\, \vec{v}_\alpha^{\,2} = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + r^2\,\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \dot{\psi}^2\right)\,. \tag{3.77}$$

Damit können wir die kinetische Energie des Reifens angeben:

$$T = \frac{m}{4\,\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\alpha\, \vec{v}_\alpha^{\,2} = \frac{m}{2}\,\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + r^2\,\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \dot{\psi}^2\right)\right)\,. \tag{3.78}$$

Die potentielle Energie ist in diesem Fall besonders einfach. Sie lautet $V = m\,g\,r$ und hängt nicht von den dynamischen Variablen ab. Wir können also die Lagrangefunktion des Reifens wie folgt angeben:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\,\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + r^2\,\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \dot{\psi}^2\right)\right) - m\,g\,r\,. \tag{3.79}$$

Damit lauten die Lagrange-Gleichungen 1. Art (3.60)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{x}_A} - \frac{\partial\,L}{\partial x_A} = m\,\ddot{x}_A = \lambda_1 = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\,a_{i,x_A}\,, \tag{3.80}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{y}_A} - \frac{\partial\,L}{\partial y_A} = m\,\ddot{y}_A = \lambda_2 = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\,a_{i,y_A}\,, \tag{3.81}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\,L}{\partial\varphi} = m\,r^2\,\frac{\ddot{\varphi}}{2} = 0 = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\,a_{i,\varphi}\,, \tag{3.82}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial\,L}{\partial\psi} = m\,r^2\,\ddot{\psi} = \lambda_1\,r\,\cos\varphi + \lambda_2\,r\,\sin\varphi = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\,a_{i,\psi}\,. \tag{3.83}$$

Die vier Gleichungen sind durch die Nebenbedingungen (3.72) und (3.73) zu ergänzen, die wir auch als

$$\dot{x}_A + r\,\dot{\psi}\,\cos\varphi = 0\,, \tag{3.84}$$

$$\dot{y}_A + r\,\dot{\psi}\,\sin\varphi = 0\,. \tag{3.85}$$

schreiben können.

Wir lösen nun das durch (3.80)-(3.85) definierte Problem. Dazu differenzieren wir zunächst (3.84) und (3.85) einmal nach der Zeit:

$$\ddot{x}_A = -r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left(\dot{\psi}\,\cos\varphi\right)\,, \tag{3.86}$$

$$\ddot{y}_A = -r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left(\dot{\psi}\,\sin\varphi\right)\,. \tag{3.87}$$

Durch Vergleich dieser Ergebnisse mit (3.80) und (3.81) folgert man

$$\lambda_1 = -m\,r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\psi}\,\cos\varphi\right) = -m\,r\,\left(\ddot{\psi}\,\cos\varphi - \dot{\psi}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right)\,, \tag{3.88}$$

$$\lambda_2 = -m\,r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\psi}\,\sin\varphi\right) = -m\,r\,\left(\ddot{\psi}\,\sin\varphi + \dot{\psi}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right)\,. \tag{3.89}$$

Einsetzen dieses Ergebnisse in (3.83) führt auf (wir kürzen zur Vereinfachung den Vorfaktor m weg)

$$\begin{aligned} r^2\,\ddot{\psi} &= -r^2\,\cos\varphi\,\left(\ddot{\psi}\,\cos\varphi - \dot{\psi}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right) - r^2\,\sin\varphi\,\left(\ddot{\psi}\,\sin\varphi + \dot{\psi}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right) \\ &= -r^2\,\ddot{\psi}\,. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Zusammen mit (3.82) folgen damit die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi} = 0\,, \qquad \ddot{\psi} = 0 \tag{3.91}$$

für die Winkel φ, ψ. Diese Gleichungen sind besonders einfach und lassen sich entsprechend leicht lösen. Man findet ein lineares Verhalten der Winkel

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)\,t\,, \qquad \psi(t) = \psi(0) + \dot{\psi}(0)\,t\,. \tag{3.92}$$

Mit diesem Ergebnis gehen wir zurück in (3.84) bzw. (3.85). Wir integrieren einmal bezüglich t und erhalten

$$\begin{aligned} x_A(t) - x_A(0) &= -r\int_0^t \mathrm{d}t'\,\left(\dot{\psi}(t')\,\cos\left(\varphi(t')\right)\right) \\ &= \begin{cases} -r\,\dot{\psi}(0)\,\cos\left(\varphi(0)\right)\,t & \text{für } \dot{\varphi}(0) = 0\,, \\ -\dfrac{r\,\dot{\psi}(0)}{\dot{\varphi}(0)}\,\left[\sin\left(\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)\,t\right) - \sin\left(\varphi(0)\right)\right] & \text{sonst}\,, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned} y_A(t) - y_A(0) &= -r\int_0^t \mathrm{d}t'\,\left(\dot{\psi}(t')\,\sin\left(\varphi(t')\right)\right) \\ &= \begin{cases} -r\,\dot{\psi}(0)\,\sin\left(\varphi(0)\right)\,t & \text{für } \dot{\varphi}(0) = 0\,, \\ \dfrac{r\,\dot{\psi}(0)}{\dot{\varphi}(0)}\,\left[\cos\left(\varphi(0) + \dot{\varphi}(0)\,t\right) - \cos\left(\varphi(0)\right)\right] & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.94}$$

Schickt man den Reifen also los, ohne ihm eine Drehung um seine Achse mitzugeben ($\dot{\varphi}(0) = 0$), so läuft der Reifen entlang einer Geraden. Gibt man ihm jedoch beim Loslaufen eine kleine Drehung um seine Achse mit, so bewegt er sich auf einer Kreisbahn.

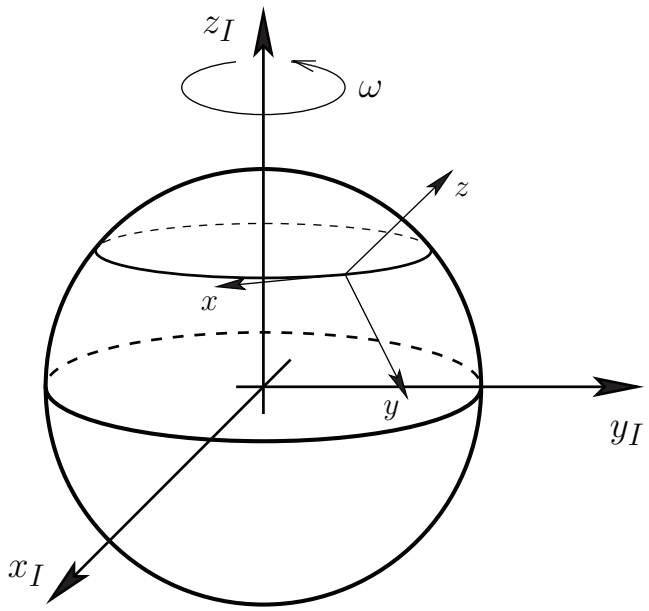


Abbildung 3.3: *Eine Bezugssystem rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z_I-Achse eines Inertialsystems.*

Im Prinzip kann man einen Kippwinkel ϑ des Reifens gegen die z-Achse in die Herleitung der Bewegungsgleichungen mit einbeziehen. Die Zwangsbedingungen (3.72) und (3.73) werden durch diese Verallgemeinerung nicht verändert. In dem Ortsvektor (3.74) treten nun aber Produkte trigonometrischer Funktionen der drei Winkel φ, ψ, ϑ auf. Entsprechend enthält die Geschwindigkeit (3.75) dann auch Terme, die proportional zu $\dot{\vartheta}$ sind. Insbesondere die kinetische Energie (3.78) wird damit deutlich komplizierter; die potentielle Energie V erhält hingegen lediglich eine einfache Abhängigkeit vom Winkel ϑ.

3.3 Rotierende Bezugssysteme

Wir kehren zurück zum Lagrange-Formalismus 2. Art. In Unterkapitel 3.1.5 hatten wir die Forminvarianz der Lagrangegleichungen 2. Art (3.18) und damit verbunden ihre Anwendbarkeit in beschleunigten Bezugsystemen betont. Dies wollen wir nun auf das Beispiel eines rotierenden Bezugssystems anwenden. Rotierende Bezugssysteme sind von besonderer Bedeutung, da die Rotation der Erde um ihre eigene Achse die wichtigste Korrektur zu einem Inertialsystem bei Beobachtungen in einem Labor auf der Erdoberfläche darstellt (weitere Korrekturen, die z.B. durch die Beschleunigung verursacht werden, die erforderlich ist, um die Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne zu halten, sind offensichtlich deutlich kleiner und entsprechend weniger wichtig).

Dementsprechend denken wir insbesondere an ein Bezugssystem, das fest mit einem Punkt der Oberfläche einer rotierenden Kugel verbunden ist, siehe Abb. 3.3.

Zunächst betrachten wir ein Teilchen, das sich auf einer Kreisbahn um die z-Achse bewegt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\,\cos(\omega\,t) \\ r\,\sin(\omega\,t) \\ z \end{pmatrix} . \tag{3.95}$$

Für die zugehörige Geschwindigkeit gilt:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\,\omega\,\sin(\omega\,t) \\ r\,\omega\,\cos(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_z \times \vec{r}(t) \tag{3.96}$$

mit $\vec{\omega}_z = \omega\,\vec{e}_z$. Um dieses Ergebnis auf eine beliebige Drechachse $\vec{\omega}/\omega$ zu verallgemeinern ($\omega = |\vec{\omega}|$ ist der Betrag der Winkelgeschwindigkeit), drehen wir zunächst die Achse $\vec{\omega}_z$ mit Hilfe einer orthogonalen Transformation O auf die Achse $\vec{\omega}$

$$\begin{aligned} O\,\vec{\omega}_z &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}}_{=O} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos\varphi\,\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\,\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \omega = \vec{\omega}\,. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Anwendung der Transformation O auf (3.96) liefert $O\,\vec{v} = (O\,\vec{\omega}_z)\times(O\,\vec{r}) = \vec{\omega}\times(O\,\vec{r})$. Somit gilt

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t) \tag{3.98}$$

auch für jede beliebige Drechachse, die nicht notwendig mit der z-Achse zusammenfällt.

Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen der Masse m. Die Lagrangefunktion stellt man zunächst in einem ortsfesten Inertialsystem auf: den Ort des Teilchens in dem Inertialsystem bezeichnen wir mit $\vec{r}_I$ und seine Geschwindigkeit mit $\vec{v}_I$. Wir nehmen ferner an, dass das Kraftfeld konservativ ist und somit ein Potential $V(\vec{r}_I)$ besitzt. Die kinetische Energie lautet $T = m\,\vec{v}_I^{\,2}/2$ und somit finden wir die Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}_I, \vec{v}_I) = \frac{m}{2}\,\vec{v}_I^{\,2} - V(\vec{r}_I)\,. \tag{3.99}$$

Diese Lagrangefunktion ist nun durch den Ort $\vec{r}$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}$ auszudrücken, den man in dem rotierenden Koordinatensystem mißt.

Den Ortsvektor $\vec{r}$ in dem rotierenden Bezugssystem kann man leicht durch eine Transformation der Koordinaten in den im Inertialsystem beobachteten Ortsvektor $\vec{r}_I$ umrechnen

$$\vec{r}_I = B\,\vec{r} = \vec{r}\,. \tag{3.100}$$

Hierbei bezeichnen wir die Transformation der Koordinaten zwischen den Bezugssystemen mit einer zeitabhängigen 3×3 Matrix B. Ist diese Umrechnung offensichtlich, lassen sie wir unter Verwendung einer etwas ungenauen Notation B auch weg.

Es verbleibt die Umrechnung der Geschwindigkeit. Mit (3.100) finden wir

$$\vec{v}_I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(B\,\vec{r}) = B\,\dot{\vec{r}} + \dot{B}\,\vec{r} = \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,. \tag{3.101}$$

Aufgrund der Zeitabhängigkeit des Koordinatenwechsels B erhalten wir einen Zusatzterm $\dot{B}\,\vec{r}$. Diesen haben wir mit Hilfe von (3.98) als $\vec{\omega}\times\vec{r}$ geschrieben. Bei (3.101) ist zu beachten, dass auch $\vec{\omega}$ in dem *rotierenden Koordinatensystem* dargestellt werden muß. ω_x, ω_y und ω_z sind also die Projektionen der Winkelgeschwindigkeit auf die x-, y- und z-Achse des rotierenden Koordinatensystems.

Mit (3.100) und (3.101) kann man die Lagrangefunktion (3.99) in dem rotierenden Koordinatensystem schreiben:

$$L(\vec{r},\vec{v}) = \frac{m}{2}\,\vec{v}^2 + m\,\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{m}{2}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 - V(\vec{r}) = T_{\text{eff.}}(\vec{v}) - V_{\text{eff.}}(\vec{r},\vec{v})\,. \tag{3.102}$$

An dieser Stelle haben wir bereits eine Uminterpretation angedeutet. Wir behandeln die kinetische Energie in dem rotierenden Bezugsystem so, also ob es sich um ein Intertialsystem handeln würde, d.h. wir führen eine effektive kinetische Energie

$$T_{\text{eff.}}(\vec{v}) = \frac{m}{2}\,\vec{v}^2 \tag{3.103}$$

ein. Die verbleibenden Terme in (3.102) müssen wir einem *geschwindigkeitsabhängigen* effektiven Potential

$$V_{\text{eff.}}(\vec{r},\vec{v}) = -m\,\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) - \frac{m}{2}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 + V(\vec{r}) \tag{3.104}$$

zuschlagen.

Dem effektiven Potential kann eine effektive Kraft $\vec{F}_{\text{eff.}}$ zugeordenet werden. Um $\vec{F}_{\text{eff.}}$ zu bestimmen, müssen wir den Gradienten von $V_{\text{eff.}}$ berechnen. Der komplizierteste Term von $V_{\text{eff.}}$, der hierbei auftritt, ist $(\vec{\omega}\times\vec{r})^2$. An dieser Stelle sind die Beziehungen $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ und $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ nützlich, die beide leicht mit der Kontraktion zweier Levi-Civita Symbole hergeleitet werden können. Damit findet man

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\,\left[\vec{\omega}^2\,\vec{r}^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2\right] = 2\,\left[\vec{\omega}^2\,\vec{r} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\,\vec{\omega}\right] = 2\,\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega})\,. \tag{3.105}$$

Die zu (3.104) gehörige effektive Kraft $\vec{F}_{\text{eff.}}$ ist dann mit Hilfe von (3.15) zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{eff.}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V_{\text{eff.}}}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial V_{\text{eff.}}}{\partial \vec{r}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\, m\,\vec{v}\cdot(\vec{r}\times\vec{\omega}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(m\,\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{\omega}) + \frac{m}{2}\,(\vec{r}\times\vec{\omega})^2\right) - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \\
&= m\,\vec{r}\times\dot{\vec{\omega}} + 2\,m\,\vec{v}\times\vec{\omega} + m\,\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega}) - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}\,, \qquad (3.106)
\end{aligned}$$

wobei neben (3.105) die Antisymmetrie des Kreuzproduktes, d.h. $\vec{\omega}\times\vec{r} = -\vec{r}\times\vec{\omega}$ sowie die zyklische Invarianz des Spatproduktes, d.h. $\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{\omega})$ verwendet wurde.

Das Ergebnis (3.106) enthält drei Scheinkräfte (auch als Trägheitskräfte bezeichnet), die ein Beobachter in dem rotierenden Bezugssystem feststellen kann:

(i) $m\,\vec{r}\times\dot{\vec{\omega}}$ ist nur bei nicht-gleichförmiger Rotation von Null verschieden.

(ii) $m\,\vec{\omega}\times(\vec{r}\times\vec{\omega})$ ist die bekannte *Zentrifugalkraft*. Sie wirkt radial nach außen und steht senkrecht auf der Drehachse.

(iii) $2\,m\,\vec{v}\times\vec{\omega}$ wird „*Corioliskraft*“ genannt. Die Namensgebung basiert auf ihrem expliziten Auftreten in einer Arbeit von Gaspard Gustave de Coriolis aus dem Jahr 1835 [4]. Diese Scheinkraft hängt von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens ab und steht sowohl senkrecht auf $\vec{v}$ als auch auf der Drechachse $\vec{\omega}$.
Die Coriolis-Kraft bewirkt, dass ein Teilchen, das sich in einer horizontalen Ebene auf der nördlichen Erd-Halbkugel bewegt, nach rechts abgelenkt wird, auf der südlichen Halbkugel hingegen nach links. Dies hat wichtige Auswirkungen auf langsame und großräumige Abläufe auf der Erde wie z.B. das Wetter.
Beim Blick auf die Wetterkarte wird man regelmäßig mit den Auswirkungen der Coriolis-Kräfte konfrontiert. Die Ablenkung der aus einem außertropischen Hochdruckgebiet ausströmenden bzw. in ein Tiefdruckgebiet einströmenden Luftmassen durch die Coriolis-Kraft bewirkt nämlich, dass Hochdruckgebiete auf der Nordhalbkugel im Uhrzeigersinn und Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel gegen den Uhrzeigersinn rotieren. Auf der Südhalbkugel ist der Drehsinn der Hoch- bzw. Tiefdruckgebiete umgekehrt.

3.3.1 Perle auf erdfestem Draht

Als eine Anwendung wollen wir die Bewegungsgleichungen für eine Perle der Masse m herleiten, die auf einem parabelförmig gebogenen Draht gleitet, wobei der Draht erdfest entlang eines Breitengrades montiert ist.

Das erdfeste Koordinatensystem wählen wir wie in Abb. 3.3 skizziert, d.h. die x-Achse zeigt entlang des Breitengrades und die z-Achse senkrecht zur Erdoberfläche. Die geographische Breite, d.h., den Winkel des Breitengrades zum Äquator bezeichnen wir mit φ und den Erdradius mit R.

Wir betrachten kleine Abstände von der Erdoberfläche, so dass wir das Potential als linear im Abstand von der Erdoberfläche annehmen können. In dem ortsfesten Inertialsystem gilt also

$$V(\vec{r}_I) = m\,g\;(\vec{r}_I \cdot \vec{e}_r - R)\;, \tag{3.107}$$

wobei $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}_I$ ist. Die kinetische Energie der Perle ist in dem Inertialsystem $T = \frac{m}{2}\,\vec{v}_I^{\,2}$. Damit lautet die Lagrangefunktion in dem Inertialsystem

$$L = T - V = \frac{m}{2}\,\vec{v}_I^{\,2} - m\,g\;(\vec{r}_I \cdot \vec{e}_r - R)\;. \tag{3.108}$$

Wir transformieren nun zunächst $\vec{v}_I$ in das rotierende Bezugssystem. Dazu müssen wir die Drehachse in dem rotierenden Bezugssystem darstellen:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\,\omega\,. \tag{3.109}$$

Einsetzen in (3.101) ergibt

$$\vec{v}_I = \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega\,\cos\varphi\,z - \omega\,\sin\varphi\,y \\ \dot{y} + \omega\,\sin\varphi\,x \\ \dot{z} + \omega\,\cos\varphi\,x \end{pmatrix}\;. \tag{3.110}$$

Es empfiehlt sich, nun die Zwangsbedingungen einzusetzen. In dem rotierenden Bezugssystem erfüllt der parabelförmig gebogene Draht die Zwangsbedingungen

$$y = 0\,, \qquad z = a\,x^2\,, \tag{3.111}$$

womit $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 2\,a\,x\,\dot{x}$ gilt . Einsetzen in (3.110) führt auf

$$\vec{v}_I = \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega\,a\,\cos\varphi\,x^2 \\ \omega\,\sin\varphi\,x \\ 2\,a\,x\,\dot{x} + \omega\,\cos\varphi\,x \end{pmatrix} \tag{3.112}$$

und somit das Betragsquadrat

$$\begin{aligned} \vec{v}_I^{\,2} &= \dot{x}^2 - 2\,\dot{x}\,\omega\,a\,\cos\varphi\,x^2 + \omega^2\,a^2\,\cos^2\varphi\,x^4 + \omega^2\,\sin^2\varphi\,x^2 \\ &\quad +4\,a^2\,x^2\,\dot{x}^2 + 4\,a\,x\,\dot{x}\,\omega\,\cos\varphi\,x + \omega^2\,\cos^2\varphi\,x^2 \\ &= \left(1 + 4\,a^2\,x^2\right)\,\dot{x}^2 + \omega^2\,\left(1 + a^2\,\cos^2\varphi\,x^2\right)\,x^2 + 2\,\omega\,a\,\cos\varphi\,\dot{x}\,x^2\,. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Die potentielle Energie (3.107) ist leicht umzurechnen, da in dem fest mit der Eroberfläche verbundenen Bezugssystem $z = \vec{r}_I \cdot \vec{e}_r - R$ gilt, d.h. wir haben $V(z) = m\,g\,z = m\,g\,a\,x^2$, wenn man die Zwangsbedingung (3.111) berücksichtigt.

Insgesamt lautet die Lagrangefunktion in dem rotierenden Bezugssystem

$$\frac{L(x,\dot{x})}{m} = \frac{(1+4\,a^2\,x^2)\;\dot{x}^2 + \omega^2\;(1+a^2\;\cos^2\varphi\,x^2)\;x^2 + 2\,\omega\,a\;\cos\varphi\,\dot{x}\,x^2}{2} - g\,a\,x^2\,. \tag{3.114}$$

Die Lagrangegleichung (3.18) lautet somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2\,\dot{x}\,\left(1+4\,a^2\,x^2\right) + 2\,\omega\,a\,\cos\varphi\,x^2\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[8\,a^2\,x\,\dot{x}^2 + 2\,\omega^2\,x + 4\,\omega^2\,a^2\;\cos^2\varphi\,x^3 + 4\,\omega\,a\,\cos\varphi\,\dot{x}\,x\right] + 2\,g\,a\,x \\ &= \left[\ddot{x}\,\left(1+4\,a^2\,x^2\right) + 8\,\dot{x}\,a^2\,\dot{x}\,x + 2\,\omega\,a\,\cos\varphi\,\dot{x}\,x\right] \\ &\quad -\left[4\,a^2\,x\,\dot{x}^2 + \omega^2\,x + 2\,\omega^2\,a^2\;\cos^2\varphi\,x^3 + 2\,\omega\,a\,\cos\varphi\,\dot{x}\,x\right] + 2\,g\,a\,x\,. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Dieses Ergebnis kann wie folgt zusammengefaßt werden:

$$\ddot{x}\,\left(1+4\,a^2\,x^2\right) + 4\,a^2\,x\,\dot{x}^2 + 2\,g\,a\,x = \omega^2\,\left(1+2\,a^2\;\cos^2\varphi\,x^2\right)\,x\,. \tag{3.116}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist identisch mit der Bewegungsgleichung der Perle auf einem feststehenden Draht (2.57) mit $\omega = 0$. Sitzt der Beobachter am Nordpol, d.h. $\varphi = \pi/2$, so realisiert die hier diskutierte Situation eine Perle auf einem Draht, der sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse eines Inertialsystems dreht. Dementsprechend ist das Ergebnis (3.116) für $\varphi = \pi/2$, d.h. $\cos\varphi = 0$ identisch mit (2.57).

Bei dieser Rechnung haben wir den Lagrange-Formalismus 2. Art verwendt. Tatsächlich hätten wir uns auch des Lagrange-Formalismus 1. Art bedienen können. Wir haben in Unterkapitel 3.1.5 zwar nur die Forminvarianz der Lagrangegleichungen 2. Art betont. Allerdings kann man in der Rechnung aus Unterkapitel 3.1.5 zunächst $3\,N - k$ durch eine allgemeine Zahl n generalisierter Koordinaten ersetzen. Damit verallgemeinert sich (3.53) zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} - \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_j}\,. \tag{3.117}$$

Setzen wir nun $n = 3\,N$ und (3.60) ein, so finden wir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} - \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_j} = \sum_{l=1}^{3N}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,a_{i,l}\,\frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_j} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,\tilde{a}_{i,j} \tag{3.118}$$

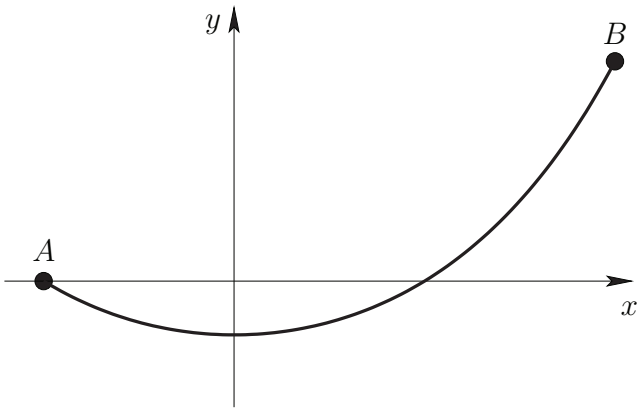


Abbildung 3.4: *Ein Seil der Länge ℓ und Massendichte μ ist zwischen zwei Punkten A, B eingespannt.*

mit

$$\tilde{a}_{i,j} = \sum_{l=1}^{3N} a_{i,l} \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_j} \,. \tag{3.119}$$

Diese rechte Seite ist nichts anderes als die Übersetzung der Zwangsbedingung (2.8) in die Koordinaten $\tilde{q}_j$, wie man leicht mit der Verallgemeinerung von (3.47) auf $n = 3\,N$ generalisierte Koordinaten sieht. Damit folgt, dass die Lagrange-Gleichungen 1. Art (3.60) ebenfalls in beschleunigten Bezugssystemen gelten.

3.4 Variationsprinzip

Extremalprinzipien spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Wir wollen im folgenden ein zu den Lagrangegleichungen 2. Art (3.18) äquivalentes Variationsprinzip angeben. Dazu benötigen wir allerdings einige Elemente der Variationsrechnung, die wir zunächst einführen.

3.4.1 Variationsrechnung I

Dieses Unterkapitel enthält einen Exkurs, in dem wir Techniken der Variationsrechnung einführen.

Zur Illustration der Problematik betrachten wir ein Seil, das wie in Abb. 3.4 skizziert zwischen zwei Punkten A und B eingespannt ist. Einerseits besitzt das Seil eine fest vorgegebene Länge ℓ, andererseits wird seine Gleichgewichtslage durch ein Minimum der potentiellen Energie bestimmt. Jakob Bernoulli stellte bereits 1690 die Aufgabe, die Kurvenform dieses Seils zu berechnen [2]. Die Lösung ist als Kettenlinie bekannt und eine klassische Anwendung der Variationsrechnung.

Wir wollen uns dem Problem der Gleichgewichtskurve nähern, indem wir anstelle des Seils eine Kette betrachten. Diese Kette habe k starr verbundene Glieder der Länge $K = \ell/k$. Die Koordinaten der Verbindungspunkte bezeichen wir mit x_i, y_i. Die starre Verbindung der Kettenglieder führt auf die Bedingungen

$$(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 = K^2\,, \quad i = 1, \ldots, k\,, \tag{3.120}$$

wobei aufgrund der starren Befestigung am linken Randpunkt (x_A, y_A) sowie am rechten Randpunkt (x_B, y_B) die Randbedingungen

$$x_0 = x_A\,, \qquad y_0 = y_A\,, \qquad x_k = x_B\,, \qquad y_k = y_B \tag{3.121}$$

gelten müssen.

Jedes Kettenglied hat die Masse $m_k = \mu\, K$. Damit ist die potentielle Energie der Kette

$$\mathcal{V}_k = \sum_{i=1}^{k} V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = \mu\, g\, K \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\,. \tag{3.122}$$

Damit lautet die Aufgabe wie folgt: gesucht ist das Minimum von (3.122) bezüglich der $2\,(k-1)$ Variablen y_i, x_i, die die k Nebenbedingungen (3.120) erfüllen müssen. Dies ist ein klassisches Extremal-Problem für $2\,(k-1)$ Unbekannte mit k Nebenbedingungen, das im Prinzip mit Hilfe von k Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j gelöst werden kann. Allerdings führt dies auf $3\,k-2$ quadratische Gleichungen in den $3\,k-2$ Variablen y_i, x_i, λ_j, die offensichtlich nicht leicht zu lösen sind, insbesondere wenn wir eine große Anzahl von Kettengliedern ($k \gg 1$) betrachten, um das Seil gut anzunähern.

Etwas günstiger ist es da schon, die Länge der Kettenglieder variabel zu gestalten, damit wir wenigstens die Abszisse äquidistant einteilen können. Wir wählen also

$$x_i = x_A + i\,\Delta x\,, \qquad i = 0, \ldots, k \qquad \text{mit} \qquad \Delta x = \frac{x_B - x_A}{k}\,. \tag{3.123}$$

Insbesondere sind hiermit die Randbedingungen (3.121) für x_0 und x_k erfüllt. Allerdings hat jedes Kettensegment nun eine variable Länge

$$K_i = \sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2}\,. \qquad i = 1, \ldots, k \tag{3.124}$$

Die Gesamtlänge ergibt sich damit zu

$$\ell = \sum_{i=1}^{k} K_i = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{k} \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)^2}\,, \tag{3.125}$$

wobei wir uns daran erinnern, dass die Gesamtlänge der Kette zu ℓ vorgegeben war.

Bei der potentiellen Energie müssen wir ebenfalls berücksichtigen, dass die Länge und damit die Masse der Kettenglieder variabel ist. Anstelle von (3.122) finden wir also

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_k &= \sum_{i=1}^{k} V\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = \mu\, g \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2}\, \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \\ &= \mu\, g \sum_{i=1}^{k} \Delta x\, \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)^2}\,. \end{aligned} \tag{3.126}$$

Die Bestimmung der Kurvenform ist damit wieder als ein Extremalproblem formuliert: Gesucht ist das Minimum von (3.126) bezüglich der $k-1$ Variablen y_i, aber diesmal nur mit einer Nebenbedingung (3.125). Auch dieses Problem kann im Prinzip durch Einführung eines Lagrange-Multiplikators λ gelöst werden. Dies führt auf k nichtlineare Gleichung für die k Variablen y_i, λ. Hierbei handelt es sich immer noch um ein anspruchsvolles Problem, insbesondere für $k \gg 1$.

Immerhin ist es nun leicht, den Grenzwert $\Delta x \to 0$ auszuführen. Aus den Summen werden damit Integrale; $(y_i - y_{i-1})/\Delta x$ geht in die Ableitung $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ der Funktion $y(x)$ bezüglich ihres Arguments x über. Aus (3.125) wird damit

$$\ell = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + y'^2} \tag{3.127}$$

und aus (3.126) wird

$$\mathcal{V} = \mu\, g \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, y\, \sqrt{1 + y'^2} \tag{3.128}$$

Damit haben wir die Bestimmung der Kurvenform des Seils nun wie folgt formuliert: Gesucht ist die Funktion $y(x)$, die (3.128) minimiert, wobei die Nebenbedingung (3.127) und die Randbedingungen

$$y(x_A) = y_A\,, \qquad y(x_B) = y_B \tag{3.129}$$

erfüllt werden müssen.

Vergessen erst einmal die Nebenbedingung, so handelt es sich bei unserem Problem um einen Spezialfall eines allgemeineren Problems, das 1744 von Leonhard Euler gelöst wurde [6]. Um dieses zu definieren, führen wir zunächst einen Begriff ein.

> *Definition:* Eine Abbildung F, die jeder Funktion $y(x)$ eine (reelle) Zahl $F[y]$ zuordnet, heißt *Funktional*.

Wir suchen also nun solche Funktionen y, die ein gegebenes Funktional F mini-

mieren (bzw. maximieren), d.h. wir haben nun das Extremalproblem für Funktionale zu lösen. Die betrachteten Funktionen kann man durch Vorgabe von Randbedingungen, wie z.B. (3.129) einschränken. Tatsächlich wollen wir uns im folgenden auf solche Probleme beschränken, für die die Funktionswerte $y(x_A)$ und $y(x_B)$ an den Rändern x_A und y_A vorgegeben sind.

Um eine Bestimmungsgleichung für das Extremum $y(x)$ zu erhalten, bedienen wir uns zunächst eines Tricks: wir betrachten Funktionen der Form

$$\hat{y}(x) = y(x) + \epsilon\,\eta(x)\,. \tag{3.130}$$

Hierbei ist ϵ eine Konstante und $\eta(x)$ eine beliebige Funktion, die die Randbedingungen

$$\eta(x_A) = 0 = \eta(x_B) \tag{3.131}$$

erfüllt. Damit ist sichergestellt, dass auch $\hat{y}(x_A) = y(x_A)$ und $\hat{y}(x_B) = y(x_B)$, d.h. dass die Funktion $\hat{y}(x)$ die gleichen Randbedingungen erfüllt wie $y(x)$.

Da es sich bei ϵ um eine Zahl handelt, können wir für gegebenes η nun die bekannten Verfahren zur Bestimmung der Extrema von Funktionen anwenden. Wir finden

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,F[y+\epsilon\,\eta]}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0\,. \tag{3.132}$$

Diese Bedingung kann man weiter auswerten, wenn man sich auf Funktionale beschränkt, die sich wie im Beispiel des Seils als Integral darstellen lassen

$$F[y] = \int\limits_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x) \tag{3.133}$$

mit einer Funktion $f(y, y', x)$. Wir setzen nun (3.133) in (3.132) ein und integrieren η' anschließend partiell:

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{\mathrm{d}\,F[y+\epsilon\,\eta]}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\ &= \int\limits_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \left[\frac{\partial\, f(y(x), y'(x), x)}{\partial y}\,\eta(x) + \frac{\partial\, f(y(x), y'(x), x)}{\partial y'}\,\eta'(x)\right] \\ &= \left.\frac{\partial\, f}{\partial y'}\,\eta(x)\right|_{x_A}^{x_B} + \int\limits_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \left[\frac{\partial\, f}{\partial y} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial\, f}{\partial y'}\right)\right]\,\eta(x)\,. \end{aligned} \tag{3.134}$$

Aufgrund der Randbedingungen (3.131) verschwindet der Randterm. Wir erhalten somit

$$\int\limits_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \left[\frac{\partial\, f}{\partial y} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial\, f}{\partial y'}\right)\right]\,\eta(x) = 0\,. \tag{3.135}$$

Das Integral auf der linken Seite muß für *jede* Funktion $\eta(x)$ verschwinden. Dies ist nur dann möglich, wenn der Integrand verschwindet. Wir haben somit folgende Diffentialgleichung für die Funktion $y(x)$ hergeleitet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,. \tag{3.136}$$

Diese Gleichung heißt *Euler-Lagrange-Gleichung*. Sie wird Leonhard Euler zugeschrieben, ist allerdings in dieser Form in der Originalarbeit [6] kaum wiederzuerkennen (bei Lagrange [20] erkennt man diese Gleichung schon eher wieder). Die Ähnlichkeit von (3.136) mit den Lagrangegleichungen 2. Art (3.18) ist kein Zufall. Wir werden hierauf in Unterkapitel 3.4.4 zurückkommen.

Den Umgang mit der Euler-Lagrange-Gleichung soll kurz anhand des *kürzesten Weges zwischen zwei gegebenen Punkten in einer Ebene* illustriert werden. Gesucht ist also die Funktion $y(x)$ mit den Randbedingungen $y(x_A) = y_A$ und $y(x_B) = y_B$, die den Weg ℓ zwischen diesen beiden Punkten minimiert. Die Länge der Kurve hatten wir uns bereits überlegt; sie ist nach (3.127) gegeben durch $\ell = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\,\sqrt{1+y'^2}$, d.h. $f(y,y') = \sqrt{1+y'^2}$. Die Euler-Lagrange-Gleichung (3.136) für den kürzesten Weg wird damit

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial y}\right]\sqrt{1+y'^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &= \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2\,y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\,. \end{aligned} \tag{3.137}$$

Diese Gleichung kann offensichtlich nur dann erfüllt werden, wenn $y'' = 0$ ist. Die Lösung ist somit eine lineare Funktion

$$y(x) = A\,x + B\,, \tag{3.138}$$

wobei die Konstanten so zu wählen sind, dass die Randbedingungen erfüllt werden: $A = (y_B - y_A)/(x_B - x_A)$, $B = (x_B\,y_A - x_A\,y_B)/(x_B - x_A)$. Wir finden somit das bekannte Ergebnis, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in einer Ebene eine *Gerade* ist.

Allgemein kann die Euler-Lagrange-Gleichung (3.136) für Funktionen $f(y,y')$, die nicht explizit von x abhängen, leicht einmal integriert werden. In diesem Fall gilt

$$f - y'\,\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{konst.} \tag{3.139}$$

Wir prüfen diese Behauptung, indem wir die totale Ableitung der linken Seite nach x bilden. Wir finden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f - y'\,\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\,y' + \frac{\partial f}{\partial y'}\,y'' - y''\,\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = y'\,\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,, \tag{3.140}$$

wobei wir im letzten Schritt (3.136) verwendet haben.

3.4.2 Lösung des Seil-Problems

Wir wollen nun mit Hilfe von (3.136) unser Augsgangsproblem lösen. Die Nebenbedingung (3.127) behandeln wir wie aus der Theorie der Extrema von Funktionen bekannt: wir kombinieren (3.128) und (3.127) mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators λ:

$$\frac{\mathcal{V}}{\mu\, g} + \lambda\, \ell = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\ (y+\lambda)\ \sqrt{1+y'^2}\,. \tag{3.141}$$

Dieses Funktional besitzt die Form (3.133) mit $f(y,y') = (y+\lambda)\ \sqrt{1+y'^2}$, d.h. der Integrand hängt nicht explizit von x ab. Wir können daher das Integral (3.139) der Euler-Lagrange-Gleichung (3.136) verwenden. Somit gilt

$$\begin{aligned} C &= f - y'\,\frac{\partial f}{\partial y'} = (y+\lambda)\ \sqrt{1+y'^2} - y'\ (y+\lambda)\ \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &= \frac{(y+\lambda)\ [(1+y'^2)-y'^2]}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\,. \end{aligned} \tag{3.142}$$

Lösen wir nach y' auf und integrieren einmal, so finden wir

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x &= \pm \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1}} = \pm C \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}} \\ &= \pm C\ \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = \pm C\ \cosh^{-1} z\,, \end{aligned} \tag{3.143}$$

wobei wir die Substitution

$$z = \frac{y+\lambda}{C} \tag{3.144}$$

verwendet haben.

Wir wählen nun in (3.143) das positive Vorzeichen der Wurzel. Setzen wir ferner die Integrationsgrenzen ein, so finden wir

$$x - x_A = C\,\left(\cosh^{-1}\frac{y+\lambda}{C} - \cosh^{-1}\frac{y_A+\lambda}{C}\right)\,, \tag{3.145}$$

bzw. aufgelöst nach y

$$y(x) = C\,\cosh\left(\frac{x-x_A}{C} + \cosh^{-1}\frac{y_A+\lambda}{C}\right) - \lambda\,. \tag{3.146}$$

Die $\cosh$-Form ist charakteristisch für eine Kettenlinie.

Bis jetzt haben wir noch nicht verwendet, dass das Seil die Länge ℓ besitzen soll. Wir setzen unsere Lösung (3.146) in (3.127) ein und beachten $1 + (\cosh' x)^2 = 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \, \sqrt{1 + y'^2} = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \, \cosh\left(\frac{x - x_A}{C} + \cosh^{-1} \frac{y_A + \lambda}{C} \right) \\ &= C \left(\sinh\left(\frac{x_B - x_A}{C} + \cosh^{-1} \frac{y_A + \lambda}{C} \right) - \sinh \cosh^{-1} \frac{y_A + \lambda}{C} \right) . \end{aligned} \tag{3.147}$$

Schließlich sind noch die Randbedingungen (3.129) zu beachten. Unsere Lösung (3.146) erfüllt $y(x_A) = y_A$ per Konstruktion. Es verbleibt die Bedingung

$$y_B = y(x_B) = C \, \cosh\left(\frac{x_B - x_A}{C} + \cosh^{-1} \frac{y_A + \lambda}{C} \right) - \lambda \, . \tag{3.148}$$

Bei (3.147) und (3.148) handelt es sich um zwei transzendente Gleichungen, die die Parameter C und λ der Lösung mit den beiden Parametern ℓ und y_B der Problemstellung in Beziehung setzten.

Man kann das Ergebnis (3.146) noch in eine etwas schönere Form bringen. Dazu berechnen wir die Position des Minimums $x_{\text{min.}}$ über

$$0 = y'(x_{\text{min.}}) = \sinh\left(\frac{x_{\text{min.}} - x_A}{C} + \cosh^{-1} \frac{y_A + \lambda}{C} \right) , \tag{3.149}$$

d.h.

$$x_{\text{min.}} = x_A - C \, \cosh^{-1} \frac{y_A + \lambda}{C} \, . \tag{3.150}$$

Man beachte, dass im Fall eines straff gespannten Seils das Minimum $x_{\text{min.}}$ auch außerhalb des Intervals $[x_A, x_B]$ liegen kann.

Einsetzen in (3.146) führt auf die deutlich kompaktere Form

$$y(x) = C \, \cosh \frac{x - x_{\text{min.}}}{C} - \lambda \, . \tag{3.151}$$

3.4.3 Variationsrechnung II

Wir benötigen im folgenden eine Verallgemeinerung auf Funktionale

$$F[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \, f(y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x), x) \, , \tag{3.152}$$

die über eine Funktion $f(y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x), x)$ von n Funktionen y_i und ihren ersten Ableitungen y_i' abhängen. Auch hier seien die Randbedingungen $y_i(x_A)$ und $y_i(x_B)$ vorgegeben.

Das Extremum bezüglich aller n Funktionen y_i finden wir mit der gleichen Strategie wie in Unterkapitel 3.4.3. Wir führen nun n Funktion η_i ein, die die Randbedingungen

$$\eta_i(x_A) = 0 = \eta_i(x_B) \tag{3.153}$$

erfüllen, und betrachten Funktionen der Form

$$\hat{y}_i(x) = y_i(x) + \epsilon\,\eta_i(x)\,. \tag{3.154}$$

Die Randbedingungen (3.153) stellen sicher, dass die Funktionen $\hat{y}_i$ die gleichen Randbedingungen erfüllen wie die Funktionen $y_i(x)$.

Wie zuvor muß das Extremum $y_i(x)$ für feste $\eta_i(x)$ ein Extremum bezüglich ϵ sein, d.h.

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{\mathrm{d}\,F[y_1+\epsilon\,\eta_1,\ldots,y_n+\epsilon\,\eta_n]}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\
&= \int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x\,\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\,f(y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n',x)}{\partial y_i}\,\eta_i(x)\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\,\frac{\partial\,f(y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n',x)}{\partial y_i'}\,\eta_i'(x)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,f}{\partial y_i'}\,\eta_i(x)\Big|_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x\,\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\,f}{\partial y_i} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial\,f}{\partial y_i'}\right)\right]\,\eta_i(x) \\
&= \int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x\,\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\,f}{\partial y_i} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial\,f}{\partial y_i'}\right)\right]\,\eta_i(x)\,.
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Auch hier haben wir zunächst einmal partiell integriert, wobei die Randterme wieder aufgrund der Randbedingungen (3.153) für die Funktionen η_i wegfallen.

Da (3.156) für beliebige Funktionen η_i gelten muß, können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen. Wir finden somit die *Euler-Lagrange-Gleichungen* für die Funktionen y_i:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial\,f}{\partial y_i'} - \frac{\partial\,f}{\partial y_i} = 0\,. \tag{3.156}$$

In der Physik wird gerne mit dem Begriff der *Variationen* gearbeitet. Wir schreiben

$$\delta y_i(x) = \epsilon\,\eta_i(x)\,. \tag{3.157}$$

Aus dieser Definition folgt zunächst, daß die Variationen δy_i genau wie die η_i am Rand verschwinden müssen (vgl. (3.153)):

$$\delta y_i(x_A) = 0 = \delta y_i(x_B)\,. \tag{3.158}$$

Ferner folgt, dass die Variation und die Ableitung bzgl. x miteinander vertauschen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\delta y_i(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\epsilon\,\eta_i(x) = \epsilon\,\eta_i'(x) = \delta y_i'(x)\,. \tag{3.159}$$

Die Bedingung für ein Extremum des Funktionals F kann nun so interpretiert werden, dass die erste Ordnung einer Taylor-Entwicklung in den Variationen δy_i verschwindet. In dieser Sprechweise sieht die Rechnung (3.155) nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \delta F = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i}\,\delta y_i(x) + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\,\delta y_i'(x)\right] = \int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x\,\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial y_i}\,\delta y_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\,\delta y_i'(x)\right] \\
&=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i'}\,\delta y_i(x)\Big|_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x\,\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)\right]\,\delta y_i(x) \\
&=\; \int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x\,\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)\right]\,\delta y_i(x)\,.
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Im ersten Schritt haben wir hier verwendet, dass Funktionale der Form (3.152) von den Funktionen y_i und ihren ersten Ableitungen y_i' abhängen, jedoch nicht von höheren Ableitungen. In der zweiten Zeile wurde wieder partiell integriert und letzten Schritt das Wegfallen der Randterme dadurch sichergestellt, dass die Variationen δy_i am Rand verschwinden, siehe (3.158). Da die δy_i beliebig sind, können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen und schließen, dass die Funktionen y_i die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.156) erfüllen.

Man spricht bei den Extrema eines Funktionals F auch von *stationären* Werten von F. Anschaulich bedeutet die Stationaritäts-Bedingung $\delta F = 0$, dass sich der Wert des Funktionals F bei kleinen Änderungen der Funktionen δy_i nicht ändert – genau wie bei einem Minimum oder Maximum einer Funktion.

3.4.4 Hamiltonsches Prinzip

William Rowan Hamilton führte in seiner Arbeit von 1834 [12] die Lagrange-Gleichungen 2. Art auf ein nach ihm benanntes Extremalprinzip zurück.

Zunächst ordnen wir mit Hilfe der Lagrangefunktion $L = T - V$ einem Satz von Bahnkurven $q_i(t)$ im Zeitinterval $t_1 \le t \le t_2$ eine *Wirkung* zu:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)\,. \tag{3.161}$$

Mit dieser Definition gilt:

> *Hamiltonsches Prinzip*: Die Bewegung erfolgt entlang derjenigen Bahnkurven $q_i(t)$, für die die Wirkung S unter allen möglichen Wegen mit gegebenen Anfangspunkten $q_i(t_1)$ und Endpunkten $q_i(t_2)$ stationär (extremal) ist.

Wir nehmen nun an, dass k holonome Zwangsbedingungen vorliegen und die generalisierten Koordinaten q_i unabhängig sind. Mit den Vorarbeiten aus den letzten Unterkapiteln ist es unter diesen Annahmen leicht, das Hamiltonsche Prinzip in Formeln zu fassen. Mit den Ersetzungen $x \to t$, $f \to L$, $y_i \to q_i$ in (3.160) finden wir:

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \,. \tag{3.162}$$

Die Variationen δq_i können also mit den bereits im Unterkapitel 2.4 eingeführten virtuellen Verrückungen identifiziert werden. Bis auf die Randbedingungen

$$\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2) \tag{3.163}$$

sind die δq_i beliebige Funktionen.

Es folgt, dass das Hamiltonsche Prinzip für holonome Zwangsbedingungen äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art ist. Einerseits sind die Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.18) nichts anderes als die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.156) für das in (3.161) definierte Wirkungs-Funktional S. Andererseits stellen die Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.18) aufgrund von (3.162) sicher, dass für die Lösungen $q_i(t)$ die Variation der Wirkung verschwindet, die Wirkung S somit entlang physikalischer Bahnkurven extremal oder zumindest stationär ist.

Es sei angemerkt, dass es Lehrbücher gibt, die die Theoretische Mechanik aus dem Hamiltonschen Prinzip entwickeln [19]. Eine weitere Anmerkung ist, dass das Hamiltonsche Prinzip z.B. auf Probleme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen der Form (2.8) verallgemeinert werden kann. Wir wollen hier auf solche Verallgemeinerungen allerdings nicht eingehen, sondern verweisen auf die Literatur, z.B. [10,11].

Eine kleine Ergänzung ist allerdings angebracht. Die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.156) für die Stationarität der Wirkung (3.161) sind als Differentialgleichungen zwar äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art (3.18). Bisher haben wir jedoch für die Koordinaten q_i und ihre Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ *Anfangswerte* $q_i(t_1)$, $\dot{q}_i(t_1)$ vorgegeben. Bei dem Zugang über das Hamiltonsche Prinzip wurden jedoch für die Koodinaten q_i *Randwerte* $q_i(t_1)$, $q_i(t_2)$ vorgegeben. Beides spezifiziert die Lösung eindeutig. Es gibt

tatsächlich durchaus auch Fragestellungen, in denen Randwerte gegenüber Anfangswerten bevorzugt sind, wie z.B. einen schiefen Wurf, bei dem von einem gegeben Ausgangspunkt in einem bestimmten Zeitintervall ein gegebener Endpunkt erreicht werden soll.

3.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Wie wir bereits am Beispiel der Energie-Erhaltung gesehen haben, sind Erhaltungssätze wichtig, da sie zur Lösung des Problems verwendet werden können. In diesem Kapitel werden wir zunächst einen bestimmten Typ von Erhaltungssätzen im Lagrange-Formalismus kennenlernen und anschließend einen allgemeineren Zusammenhang zu Symmetrien herstellen.

Allgemein heißt eine Funktion $\mathcal{E}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$ *Erhaltungsgröße* (oder *Konstante der Bewegung*), wenn für alle Lösungen $q_i(t)$ der Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathcal{E}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) = 0 \tag{3.164}$$

gilt. Es folgt, dass $\mathcal{E}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) =$ konst. für *alle* Lösungen der Bewegungsgleichungen ist. Somit erhält man für jede Erhaltungsgröße $\mathcal{E}$ eine Differentialgleichung erster Ordnung anstelle der ursprünglichen Bewegungsgleichungen, die Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind.

3.5.1 Zyklische Koordinaten

Für die folgenden Überlegungen benutzen wir den Lagrange-Formalismus 2. Art, d.h. wir gehen davon aus, dass die Lagrangefunktion L durch unabhängige Koordinaten q_i parametrisiert ist.

Zunächst definieren wir den einer Koordinate q_j zugeordneten *kanonisch konjugierten Impuls*

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,. \tag{3.165}$$

Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale haben die kanonisch konjugierten Impulse die Eigenschaften von Impulsen (es kann sich allerdings durchaus auch um Drehimpulse handeln). Beschränken wir uns ferner auf kartesische Koordinaten, so ordnet (3.165) dem Ortsvektor $\vec{r}_i$ den Impuls $\vec{p}_i = m_i\,\vec{v}_i$ zu, den wir sinngemäß bereits in (1.4) eingeführt hatten.

Eine generalisierte Koordinate q_j, die *nicht* in der Lagrangefunktion auftaucht (das Auftreten der Ableitung $\dot{q}_j$ ist erlaubt), heißt *zyklisch*. Wir betrachten nun die

Lagrangegleichung (3.18) für eine solche zyklische Koordinate:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_j \,. \tag{3.166}$$

Im ersten Term haben wir hier die Definition (3.165) des kanonisch konjugierten Impulses eingesetzt und im zweiten Term die definierende Eigenschaft einer zyklischen Koordinate verwendet. Es folgt, dass der zu einer zyklischen Koordinate kanonisch konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße ist. Somit kann man durch Wahl geeigneter Koordinaten ggfs. direkt Erhaltungsgrößen konstruieren.

Beispiel 3.1: Als erste Illustration dienen die zwei durch ein Feder gekoppelten Massen. Definieren wir die Schwerpunktskoordinate als

$$X = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2} \tag{3.167}$$

und die Relativkoordinate $x = x_1 - x_2$ wie in (3.43), so können wir die Lagrangefunktion (3.38) wie folgt schreiben:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\, \dot{X}^2 + \frac{\mu}{2}\, \dot{x}^2 - \frac{k}{2}\, x^2 + k\, d\, \sqrt{x^2 + d^2} - k\, d^2 \,, \tag{3.168}$$

wobei die reduzierte Masse μ in (3.42) eingeführt wurde.

Dass die Bewegungsgleichungen für X und x entkoppeln, hatten wir bereits in Unterkapitel 3.1.4 benutzt. Die Schwerpunktskoordinate X taucht selbst in (3.168) nicht auf, ist also ein Beispiel für eine zyklische Koordinate. Somit ist der zugehörige Schwerpunktimpuls $p_X = \partial\, L/\partial \dot{X} = (m_1 + m_2)\, \dot{X} = m_1\, \dot{x}_1 + m_2\, \dot{x}_2$ eine Erhaltungsgröße, die der Translationsinvarianz des Gesamtsystems entspricht. Diese Erhaltungsgröße hatten wir ebenfalls bereits in Unterkapitel 3.1.4 aus den Bewegungsgleichungen hergeleitet, in der Darstellung (3.168) der Lagrangefunktion ist dies jedoch offensichtlich. Dieses Beispiel zeigt somit, wie wir nach Wahl von an die Symmetrie des Problems angepaßten Koordinaten einen Erhaltungssatz sofort ablesen können.

Beispiel 3.5: Als ein weiteres Beispiel betrachten wir das sphärische Pendel. Wie in Abb. 3.5 skizziert stellen wir den Ortsvektor in Kugelkoordinaten dar:

$$\vec{r} = \ell \begin{pmatrix} \cos\varphi\, \sin\vartheta \\ \sin\varphi\, \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} \,. \tag{3.169}$$

Damit lautet die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \ell \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\, \sin\varphi\, \sin\vartheta + \dot{\vartheta}\, \cos\varphi\, \cos\vartheta \\ \dot{\varphi}\, \cos\varphi\, \sin\vartheta + \dot{\vartheta}\, \sin\varphi\, \cos\vartheta \\ \dot{\vartheta}\, \sin\vartheta \end{pmatrix} \,, \tag{3.170}$$

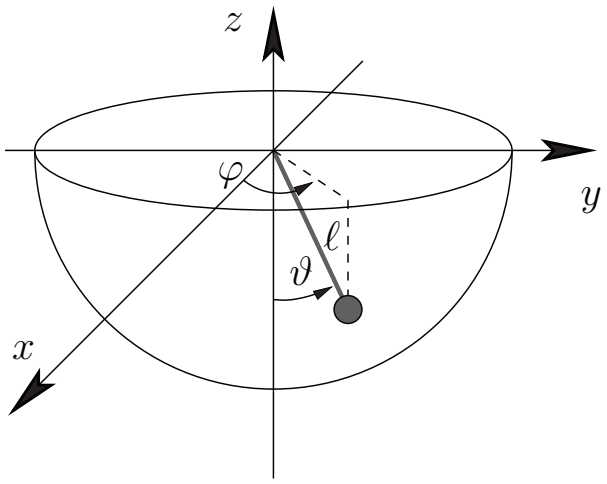


Abbildung 3.5: *Ein sphärisches mathematisches Pendel der Länge ℓ und Masse m.*

bzw. deren Betragsquadrat $\vec{v}^2 = \ell^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$. Daraus folgt die Lagrangefunktion für das sphärische Pendel

$$L = \frac{m}{2}\,\ell^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + m\,g\,\ell\,\cos\vartheta\,, \tag{3.171}$$

d.h. gegenüber dem ebenen Pendel (3.25) tritt ein zusätzlicher Term $\frac{m}{2}\,\ell^2\,\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2$ auf.

Die Koordinate φ tritt in (3.171) nicht auf, d.h. φ ist eine zyklische Koordinate. Der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,\ell^2\,\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \tag{3.172}$$

ist somit eine Erhaltungsgröße. Man kann sich mit Hilfe von (3.169) und (3.170) davon überzeugen, dass der Impuls (3.172) nichts anderes ist als die z-Komponente des *Drehimpulses*, der in kartesischen Koordinaten

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{3.173}$$

lautet. Die Tatsache, dass φ nicht in der Lagrangefunktion auftritt, beruht auf der Symmetrie des sphärischen Pendels bezüglich Drehungen um die z-Achse. Dieser Symmetrie ist eine Erhaltungsgröße $p_\varphi = L_z$ zugeordnet.

3.5.2 Noether-Theorem

Wie wir gesehen haben, kann man Symmetrien Erhaltungsgrößen zuordnen. Dies setzt allerdings in der bisherigen Formulierung die Wahl von an die Symmetrie angepaßten

Koordinaten voraus, so dass diese zyklisch werden. Emmy Noether bewies 1918 in Göttingen einen allgemeineren Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Symmetrien und Erhaltungsgrößen [24], der nach ihr *Noether-Theorem* genannt wird. In der Original-Arbeit [24] wurden Symmetrien von Variations-Problemen analysiert. Wir wollen hier einen spezielleren Fall diskutieren, der von der Lagrangefunktion $L = T - V$ ausgeht.

Wir betrachten Koordinatentransformationen

$$q_i \mapsto \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, \ldots, q_{3\,N-k}, t, \alpha)\,, \tag{3.174}$$

die stetig differenzierbar von einem Parameter α abhängen und invertierbar sind, d.h. nach

$$q_i = q_i(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_{3\,N-k}, t, \alpha) \tag{3.175}$$

aufgelöst werden können. Ferner fordern wir, dass wir für $\alpha = 0$ die identische Transformation erhalten:

$$\tilde{q}_i(q_1, \ldots, q_{3\,N-k}, t, \alpha = 0) = q_i\,. \tag{3.176}$$

Beispiele in kartesischen Koordinaten sind die Translationen in eine fest gewählte Richtung $\vec{e}$

$$\tilde{\vec{r}} = T_\alpha(\vec{r}) = \vec{r} + \alpha\,\vec{e} \tag{3.177}$$

sowie die Drehung um einen Winkel α für eine gegebene Achse. In der x-y-Ebene sieht eine solche Drehung zum Beispiel wie folgt aus

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,. \tag{3.178}$$

In diesen Beispielen bilden die Operatoren T_α eine einparametrige abelsche Gruppe, die folgende Eigenschaften hat:

(i) Für zwei Gruppenelemente T_α und T_β ist die Verknüpfung $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ wieder ein Gruppenelement. Diese Form stellt ferner Assoziativität und Kommutativität sicher.

(ii) $T_0 = \mathbb{1}$ ist das neutrale Element.

(iii) $T_{-\alpha} = T_\alpha^{-1}$ ist das zu T_α inverse Element.

Die Eigenschaften (ii) und (iii) entsprechen unseren Forderungen (3.176) bzw. (3.175).

Mit Hilfe von (3.175) können wir eine gegebene Lagrangefunktion $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ durch die neuen Koordianten $\tilde{q}_i$ und ihre Ableitungen ausdrücken. Symmetrien des

Problems führen meist zu *Invarianzen* der Lagrangefunktion. Wenn eine Koordinatentransformation (3.174) die Form der Lagrangefunktion nicht ändert, d.h. wenn

$$L(\{q_i(\{\tilde{q}_j\})\},\{\dot{q}_i(\{\tilde{q}_j\},\{\dot{\tilde{q}}_j\},t)=L(\{\tilde{q}_i\},\{\dot{\tilde{q}}_i\},t) \tag{3.179}$$

ist, nennen wir die Lagrangefunktion invariant unter der Koordinatentransformation (3.174). Betrachten wir $L(\{\tilde{q}_i\},\{\dot{\tilde{q}}_i\},t)$ als Funktion des Parameters α, so bedeutet eine Invarianz, dass keine Abhängigkeit von α besteht.

Tatsächlich benötigen wir nur die Eigenschaften für kleine α. Wir betrachten nun Lösungen $q_i(t)$ der Bewegungsgleichungen und bilden die Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,L(\{\tilde{q}_i\},\{\dot{\tilde{q}}_i\},t)}{\mathrm{d}\alpha} &= \sum_{i=1}^{3N-k}\left[\frac{\partial\,L}{\partial q_i}\,\frac{\partial\,q_i(\{\tilde{q}_i\},t,\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\frac{\partial\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,q_i(\{\tilde{q}_i\},t,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{3N-k}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial\,q_i(\{\tilde{q}_i\},t,\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial\,q_i(\{\tilde{q}_i\},t,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3N-k}\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\frac{\partial\,q_i(\{\tilde{q}_i\},t,\alpha)}{\partial\alpha}\,.\end{aligned} \tag{3.180}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir im ersten Term die Lagrangegleichungen (3.18) verwendet sowie im zweiten Term die Tatsache, dass der Parameter α zeitunabhängig ist.

Ist L nun invariant unter der Koordinatentransformation, d.h. hängt L nicht von α ab, so gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\alpha}=0\,. \tag{3.181}$$

Wir können nun die Ableitung nach α an der Stelle $\alpha=0$ betrachten. Aus (3.180) und (3.181) folgt, dass

$$\mathcal{E}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)=\sum_{i=1}^{3N-k}\frac{\partial\,L}{\partial\dot{q}_i}\,\left.\frac{\partial\,q_i(\{\tilde{q}_i\},t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{3.182}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Dies bedeutet insbesondere, dass zu jeder Koordinatentransformation, die die Lagrangefunktion nicht ändert, eine Erhaltungsgröße gehört, die mit (3.182) leicht bestimmt werden kann.

Dieses Ergebnis kann leicht auf Koordinatentransformationen (3.174) verallgemeinert werden, unter denen die Lagrangefunktion zwar nicht invariant ist, sich aber nur um eine totale zeitliche Ableitung ändert. Anstelle von (3.179) gilt in diesem Fall

$$L(\{q_i(\{\tilde{q}_j\})\},\{\dot{q}_i(\{\tilde{q}_j\},\{\dot{\tilde{q}}_j\},t)=L(\{\tilde{q}_i\},\{\dot{\tilde{q}}_i\},t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,F(\{\tilde{q}_i\},t,\alpha) \tag{3.183}$$

mit einer Funktion $F(\{\tilde{q}_i\}, t, \alpha)$[5]. Als Verallgemeinerung von (3.181) finden wir nun

$$\frac{\mathrm{d}\, L}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, F(\{\tilde{q}_i\}, t, \alpha)}{\partial \alpha}\,. \tag{3.184}$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in (3.180) führt auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial\, F(\{\tilde{q}_i\}, t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i} \left.\frac{\partial\, q_i(\{\tilde{q}_i\}, t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\,. \tag{3.185}$$

Somit ist

$$\mathcal{J}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i} \left.\frac{\partial\, q_i(\{\tilde{q}_i\}, t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} - \left.\frac{\partial\, F(\{\tilde{q}_i\}, t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{3.186}$$

eine Erhaltungsgröße. Diese Zuordnung einer Erhaltungsgröße zu einer Koordinatentransformation, unter der sich die Lagrangefunktion gemäß (3.183) transformiert, ist die zentrale Aussage des Noether-Theorems.

3.5.3 Energieerhaltung II

Die Energieerhaltung spielt eine gewisse Sonderrolle. Einerseits korrespondiert sie zu der Invarianz der Lagrangefunktion unter Zeitverschiebungen $t \mapsto \tilde{t} = t + \alpha$. Andererseits ist dies keine Koordinatentransformation im Sinne von (3.174), so dass die Ergebnisse aus dem letzten Unterkapitel nicht direkt angewendet werden können.

Wir setzen voraus, dass die Lagrangefunktion invariant unter Zeitverschiebungen ist, d.h.

$$L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t + \alpha) \tag{3.187}$$

für beliebiges α. Dies bedeutet, dass L nicht explizit von der Zeit abhängen kann:

$$\frac{\partial\, L}{\partial t} = 0\,. \tag{3.188}$$

Somit ist

$$\frac{\mathrm{d}\, L}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\frac{\partial\, L}{\partial q_i}\, \dot{q}_i + \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\, \ddot{q}_i\right] = \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\, \ddot{q}_i\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{q}_i\,. \tag{3.189}$$

Auch hier haben wir wieder Lösungen $q_i(t)$ der Bewegungsgleichungen betrachtet, so dass wir die Lagrangegleichungen (3.18) einsetzen konnten.

[5] Bei (3.183) handelt es sich um eine sogenannte Eichtransformation. Man kann zeigen, dass die Bewegungsgleichungen (3.18) invariant unter einer solchen Eichtransformation sind. Tatsächlich ist die Invarianz der Bewegungsgleichungen die angemessene Forderung für eine Symmetrie des Problems. Die Invarianz der Lagrangefunktion ist hierfür hinreichend, aber nicht notwendig.

Aus (3.189) folgt, dass

$$H := \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \tag{3.190}$$

eine Erhaltungsgröße ist. H heißt *Hamiltonfunktion* und wird in Kapitel 5 eine zentrale Rolle spielen. H entspricht dem ersten Integral (3.139) der Euler-Lagrange-Gleichung.

Wir spezialisieren uns nun zunächst auf Systeme mit konservativen Kräften, d.h. das Potential hängt nur von den Koordinaten q_i ab. Dann gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.191}$$

Wir nehmen ferner an, dass die Zwangsbedingungen skleronom sind und das Bezugssystem relativ zu einem Inertialsystem ruht. Dann gilt aufgrund der Abhängigkeit $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k})$

$$\dot{\vec{r}}_j = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \,. \tag{3.192}$$

und somit

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \sum_{j=1}^{3N-k} \sum_{k=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \, \dot{q}_k \,. \tag{3.193}$$

Es folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \tag{3.194}$$

und mit (3.191)

$$\sum_{l=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l = \sum_{l=1}^{3N-k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l = 2\,T \,. \tag{3.195}$$

Somit gilt in diesem Fall für die Hamiltonfunktion (3.190)

$$H = 2\,T - L = 2\,T - (T - V) = T + V = E \,, \tag{3.196}$$

d.h. die Hamiltonfunktion kann mit der Gesamtenergie E identifiziert werden. Wir haben also die Energieerhaltung für konservative Kraftfelder, skleronome Zwangsbedingungen und Inertialsysteme hergeleitet, die wir bereits aus den Kapiteln 1 und 2.4.2 kennen.

Die in (3.190) definierte Hamiltonfunktion H ist für jede Lagrangefunktion, die nicht explizit von der Zeit abhängt, eine Erhaltungsgröße. Im allgemeinen kann die Hamiltonfunktion H aber von der Gesamtenergie E verschieden sein.

4 Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir die Methoden des vorigen Kapitels auf anspruchsvollere Probleme anwenden. Wir werden zunächst etwas ausholen und die Erhaltungssätze des allgemeinen N-Körper-Problems herleiten.

4.1 Erhaltungssätze des N-Körper-Problems

Ein N-Körper-System besitzt die kinetische Energie

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \,, \tag{4.1}$$

wobei die m_i die Massen der N Körper sind. Das Potential schreiben wir in der Form

$$V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{i<j} V_{i,j}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,. \tag{4.2}$$

Wir haben hier zunächst angenommen, dass das N-Körper-System abgeschlossen ist, so dass keine externen Potentiale $V_i(\vec{r}_i)$ auftreten. Ferner haben wir angenommen, dass die Wechselwirkung zwischen den Körpern ausschließlich durch Paarkräfte vermittelt werden, deren Potentiale $V_{i,j}(\vec{r}_{i,j})$ sind. Hierbei haben wir die Notation

$$\vec{r}_{i,j} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \tag{4.3}$$

für den Abstandsvektor zwischen den Körpern i und j eingeführt.

Bevor wir die Erhaltungsgrößen des N-Körper-Problems herleiten, werden wir nun zunächst die Symmetriegruppe der Raum-Zeit in der klassischen Mechanik diskutieren. Anschließend werden wir die Erhaltungsgrößen mit Hilfe des Noether-Theorems aus diesen Symmetrien herleiten.

4.1.1 Galilei-Gruppe

In der klassischen Mechanik wird die Raum-Zeit durch eine Zeit $t \in \mathbb{R}$ und einen Ortsvektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ parametrisiert. Die Raum-Zeit ist somit isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^4$ (eine präzisere Begriffsbildung findet man in Lehrbüchern der Mathematischen Physik wie z.B. [1]). Auf dieser Raum-Zeit hat man folgende Strukturen:

(i) Eine lineare Funktion $t(B-A)$, die zwei Ereignissen A und B in der Raum-Zeit einen Zeitabstand zuordnet. Zwei Ereignisse A, B mit $t(B-A) = 0$ werden *gleichzeitig* genannt.

(ii) Der *Abstand zwischen zwei gleichzeitigen Ereignissen* A, B ist gegeben durch

$$|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = \sqrt{(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_B)}\,, \tag{4.4}$$

wobei $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$ die Ortsvektoren dieser beiden Ereignisse sind.

Die *Galilei-Gruppe* ist die Gruppe derjenigen linearen Abbildungen der Raum-Zeit, die diese Strukturen invariant lassen. Die Galilei-Gruppe wird von folgenden Transformationen erzeugt:

(i) *Zeitverschiebungen:*

$$T^{(1)}_\tau(t, \vec{r}) = (t + \tau, \vec{r}) \tag{4.5}$$

mit einer Konstanten $\tau \in \mathbb{R}$.

(ii) *Räumliche Translationen:*

$$T^{(2)}_{\vec{\varrho}}(t, \vec{r}) = (t, \vec{r} + \vec{\varrho}) \tag{4.6}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{\varrho} \in \mathbb{R}^3$.

(iii) *Räumliche Drehungen:*

$$T^{(3)}_D(t, \vec{r}) = (t, D\,\vec{r}) \tag{4.7}$$

mit einer orthogonalen Drehmatrix D ($D^\dagger\, D = \mathbb{1}$). Eine Drehung wird durch die Angabe einer Achse und eines Winkels eindeutig spezifiziert. Alternativ kann man jede Drehung durch eine Komposition von drei Drehungen um die Koordinatenachsen darstellen. Die Drehgruppe besitzt also 3 Parameter.

(iv) *Eigentliche Galilei-Transformationen:*

$$T^{(4)}_{\vec{v}}(t, \vec{r}) = (t, \vec{r} + \vec{v}\,t) \tag{4.8}$$

mit einem konstanten Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Die eigentlichen Galilei-Transformationen (4.8) beschreiben Übergänge zwischen verschiedenen Inertialsystemen, während die Transformationen (4.5)–(4.7) in einem gegebenen Inertialsystem wirken. Man beachte, dass die Existenz der eigentlichen Galilei-Transformationen bedingt, dass Newtons ursprünglich Forderung nach einem absoluten Raum [23] aufgegeben werden muß. Jedoch enthält die Galilei-Gruppe keine analoge Transformation der Zeit, so dass in der klassischen (nicht-relativistischen) Mechanik eine absolute Zeit existiert.

Die Transformationen (4.5)–(4.8) werden durch insgesamt 10 Parameter beschrieben. Da man jedes Element T der Galilei-Gruppe eindeutig in der Form $T = T^{(1)}_\tau \circ$

$T^{(2)}_{\vec{\varrho}} \circ T^{(3)}_{D} \circ T^{(4)}_{\vec{v}}$ zerlegen kann[6], besitzt die Galilei-Gruppe 10 kontinuierliche Parameter.

4.1.2 Erhaltungsgrößen eines abgeschlossenen N-Körper-Problems

Aufgrund der Überlegungen des letzten Unterkapitels sowie des Noether-Theorems aus Kapitel 3.5.2 besitzt jedes System, das invariant unter der Galilei-Gruppe ist, mindestens 10 Erhaltungsgrößen. Wir wollen diese Erhaltungsgrößen nun für ein allgemeines abgeschlossenes N-Körper-System konstruieren.

(i) *Energie:* Aufgrund ihrer Absolutheit spielt die Zeit t in der klassischen Mechanik eine Sonderrolle. Das Noether-Theorem kann deswegen nicht auf Zeitverschiebungen angewendet werden. Trotzdem haben wir bereits im Unterkapitel 3.5.3 gezeigt, dass aus Invarianz unter Zeitverschiebungen Erhaltung der in (3.190) definierten Größe H folgt. Im Fall des N-Körper-Problems ist $H = T+V = E$, womit die Erhaltung der Gesamtenergie E folgt.

(ii) *Gesamtimpuls:* Die oben angegebene kinetische Energie (4.1) sowie die potentielle Energie (4.2) sind invariant unter Translationen

$$\tilde{\vec{r}}_i = \vec{r}_i + \alpha\,\vec{e}\,, \tag{4.9}$$

wobei $\vec{e}$ eine fest gewählte aber ansonsten beliebige Richtung ist. Die zu (4.9) inverse Transformation ist $\vec{r}_i(\alpha) = \tilde{\vec{r}}_i - \alpha\,\vec{e}$. Wir können die zugehörige Erhaltungsgröße somit mit (3.182) berechnen, wobei wir zu einer Vektor-Notation übergehen und beachten, dass das Potential V nicht von den Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ abhängt:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left.\frac{\partial\,\vec{r}_i(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} \cdot \vec{e} = -\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i \cdot \vec{e} = -\vec{P}\cdot\vec{e} \tag{4.10}$$

mit dem Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\,. \tag{4.11}$$

Aufgrund der Beliebigkeit des Vektors $\vec{e}$ in (4.10) folgt die Erhaltung des Gesamtimpulses (4.11).

[6] Hier ohne Beweis dieser Aussage. Man beachte, dass zwar zeitliche $T^{(1)}_{\tau}$ und räumliche Translationen $T^{(2)}_{\vec{\varrho}}$ miteinander vertauschen, die Galilei-Gruppe jedoch ansonsten nicht-kommutativ ist, so dass die Reihenfolge in dieser Zerlegung zu beachten ist.

(iii) *Drehimpuls:* Die kinetische Energie (4.1) ist rotationsinvariant. Wir nehmen nun ferner an, dass die Paarpotentiale (4.2) nur von dem Betrag des Abstandes $\vec{r}_{i,j}$, jedoch nicht von der Richtung abhängen:

$$V_{i,j}(\vec{r}_{i,j}) = V_{i,j}(|\vec{r}_{i,j}|)\,. \tag{4.12}$$

Mit dieser zusätzlichen Annahme ist auch das Potential (4.2) invariant unter simultanen Drehungen aller N Ortsvektoren $\vec{r}_i$.
Für eine gegebene Drehung kann die zugehörige Erhaltungsgröße nun mit Hilfe von (3.182) berechnet werden. Einen vollständigen Satz von Erhaltungsgrößen für die Drehgruppe erhält man, wenn man z.B. unabhängige Drehungen um die drei Koordinatenachsen betrachtet[7]. Wir betrachten exemplarisch eine Drehung um die z-Achse, wobei wir gleich die inverse Transformation (3.175) angeben:

$$\vec{r}_i(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\vec{r}}_i\,. \tag{4.13}$$

Für die Ableitung finden wir damit

$$\left.\frac{\partial\,\vec{r}_i(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{r}_i = \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{4.14}$$

Wir beachten auch hier wieder $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i}$ und berechnen die zu der Drehung (4.13) gehörige Erhaltungsgröße mit Hilfe von (3.182):

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} \cdot \left.\frac{\partial\,\vec{r}_i(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i \cdot \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\dot{x}_i\,y_i - \dot{y}_i\,x_i) = -L_z\,, \tag{4.15}$$

wobei L_z die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\,\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{4.16}$$

ist. Analog folgt die Erhaltung von L_x und L_y aus der Invarianz um Drehungen um die x- bzw. y-Achse. Für ein vollständig rotationsinvariantes Problem folgt somit die Erhaltung des Drehimpuls-Vektors (4.16).

[7] Zur Erinnerung: jede Drehung läßt sich als Produkt von Drehungen um die Koordinatenachsen schreiben. Bei der Ableitung bei $\alpha = 0$ erhält man somit eine Summe von drei Termen, in denen jeweils nur die Ableitung einer der drei Drehungen bei $\alpha = 0$ auftritt.

(iv) *Schwerpunkt:* Wir betrachten nun eine eigentliche Galilei-Transformationen mit einer globalen Geschwindigkeit $\vec{v}$ und verwenden die inverse Form

$$\vec{r}_i = \tilde{\vec{r}}_i - \alpha\,\vec{v}\,t\,. \tag{4.17}$$

Die Paarpotentiale sind invariant unter dieser Transformation:

$$V_{i,j}\left(\vec{r}_i(\tilde{\vec{r}}_i,t,\alpha) - \vec{r}_j(\tilde{\vec{r}}_j,t,\alpha)\right) = V_{i,j}\left(\tilde{\vec{r}}_i - \tilde{\vec{r}}_j\right)\,. \tag{4.18}$$

Wir betrachten nun die kinetische Energie (4.1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{r}_i(\tilde{\vec{r}}_i,t,\alpha)\right)^2 &= \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\dot{\tilde{\vec{r}}}_i - \alpha\,\vec{v}\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\,\dot{\tilde{\vec{r}}}_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\alpha^2}{2}\,\vec{v}^{\,2} - \alpha\,\dot{\tilde{\vec{r}}}_i\cdot\vec{v}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\,\dot{\tilde{\vec{r}}}_i^{\,2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,F(\{\tilde{\vec{r}}_i\},t,\alpha)\end{aligned} \tag{4.19}$$

mit der Funktion

$$F(\{\tilde{\vec{r}}_i\},t,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\alpha^2}{2}\,\vec{v}^{\,2}\,t - \alpha\,\tilde{\vec{r}}_i\cdot\vec{v}\right)\,. \tag{4.20}$$

Die Lagrangefunktion besitzt somit das allgemeinere Transformationsverhalten (3.183) und wir müssen die Erhaltungsgröße mit (3.186) konstruieren, wobei wir wieder $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i}$ verwenden:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i}\cdot\left.\frac{\partial\,\vec{r}_i(\tilde{\vec{r}}_i,t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} - \left.\frac{\partial\;F(\{\tilde{\vec{r}}_i\},t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\cdot(-\vec{v}\,t) + \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{r}_i - \vec{v}_i\,t)\\ &= \vec{v}\cdot\left(M\,\vec{R} - \vec{P}\,t\right)\end{aligned} \tag{4.21}$$

mit der *Gesamtmasse*

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{4.22}$$

und dem Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i\,. \tag{4.23}$$

Da der Vektor $\vec{v}$ beliebig ist, können wir ihn in (4.21) weglassen. Es folgt, dass

$$\vec{I}(\{\vec{r}_i\},\{\dot{\vec{r}}_i\},t) = M\,\vec{R} - \vec{P}\,t \tag{4.24}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Unter Beachtung von $\vec{I}(\{\vec{r}_i\},\{\dot{\vec{r}}_i\},0) = \vec{R}(0)$ folgt, dass der Schwerpunkt sich linear und gleichförmig bewegt, d.h. $\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{1}{M}\,\vec{P}\,t$. Dieses auch mit ,,Schwerpunktsatz" bezeichnete Ergebnis hätten wir tatsächlich direkt durch einmalige Integration von (4.11) in der Form $M\,\dot{\vec{R}} = \vec{P}$ herleiten können. Die obige Herleitung illustriert jedoch die Anwendung des Noether-Theorems auf Transformationen, unter denen sich die Lagrangefunktion nach (3.183) transformiert.

Insgesamt haben wir für ein allgemeines abgeschlossenes rotationsinvariantes N-Körper-Problem $1+3+3+3=10$ Erhaltungsgrößen konstruiert.

4.2 Zweikörper-Zentralproblem

Bei einem allgemeinen N-Körper-Problem kann man die Erhaltung des Gesamtimpulses sowie den Schwerpunktsatz verwenden, um die Bewegung des Schwerpunktes (4.23) abzuseparieren und zu integrieren. Hierbei werden 6 Erhaltungsgrößen verwendet, um die 6 Integrationskonstanten von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu bestimmen. Für $N=1$ finden wir, dass eine kräftefreie Bewegung linear und gleichförmig ist, wie es in Newtons erstem Axiom gefordert wird.

Für $N \geq 2$ verbleiben noch Bewegungsgleichungen für die in (4.3) definierten Koordinaten $\vec{r}_{i,j}$. Da

$$\vec{r}_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} \vec{r}_{k,k+1} \tag{4.25}$$

ist, können wir $N-1$ unabhängige Relativkoordinaten $\vec{r}_{k,k+1}$ wählen. Hierzu gehören $3\,(N-1)$ gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen im allgemeinen rotationsinvarianten Fall mit Energie und Drehimpuls noch 4 Erhaltungsgrößen gegenüber stehen. Für $N \geq 3$ kommt man daher nur mit einer Analyse der Erhaltungsgrößen nicht viel weiter.

Für $N=2$ stehen für 6 Integrationskonstanten immerhin noch 4 Erhaltungsgrößen zur Verfügung. Dieses Zweikörperproblem ist somit einerseits einer Analyse noch am ehesten zugänglich. Andererseits ist es als Grundproblem von besonderer Bedeutung. So werden z.B. in unserem Planetensystem gerne zunächst Unterprobleme von zwei Körpern aus Sonne, Erde, Mond und den übrigen Planeten gelöst und anschließend der Einfluß der verbleibenden Körper als Störung betrachtet. Wir werden daher nun den Fall $N=2$ genauer analysieren.

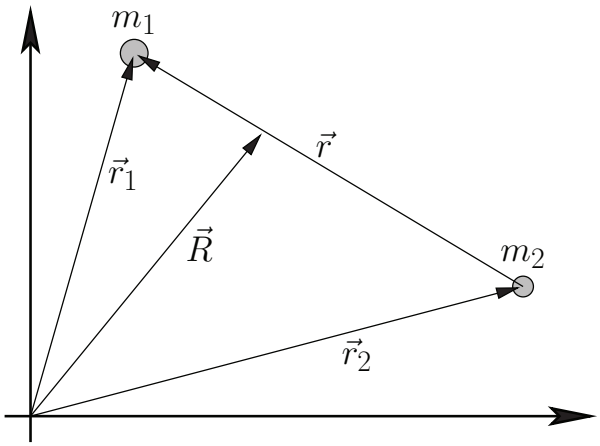


Abbildung 4.1: *Koordinaten für das Zweikörperproblem.*

4.2.1 Zurückführung auf äquivalentes Einkörperproblem

Wir betrachten nun also den Fall $N = 2$. Wie in Abb. 4.1 skizziert, sind die naheliegenden Koordinaten die in (4.3) bzw. (4.23) eingeführten Relativ- bzw. Schwerpunktskoordinaten, die in diesem Spezialfall wie folgt lauten:

$$\vec{r} = \vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,, \qquad \vec{R} = \frac{1}{m_1 + m_2}\,(m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2)\ . \tag{4.26}$$

Man liest ab, dass die Umkehrung hierzu lautet:

$$\vec{r_1} = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r}, \qquad \vec{r_2} = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r}. \tag{4.27}$$

Damit können wir die kinetische Energie (4.1) durch die Koordinaten $\vec{R}$, $\vec{r}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}\,\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\,\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{m_1}{2}\,\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_1}{2}\,\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\dot{\vec{r}}\right)^2 \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2}\,\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\,\dot{\vec{r}}^{\,2} \end{aligned} \tag{4.28}$$

mit der *reduzierten Masse*

$$\mu = \frac{m_1\,m_2^2 + m_2\,m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}\,. \tag{4.29}$$

Übliche Formen sind die vorletzte Form, die wir bereits in (3.42) kennengelernt haben, sowie auch die letzte Form. Da die Wahl der Koordinaten an das Potential

$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_{1,2}(\vec{r}_{1,2}) = V(\vec{r})$ adaptiert ist, können wir die Lagrangefunktion für das Zweikörperproblem nun wie folgt angeben:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + L_{\text{eff.}}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \tag{4.30}$$

mit einem *effektiven Einkörperproblem im Zentralfeld*

$$L_{\text{eff.}}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \,. \tag{4.31}$$

Wir haben das Zweikörperproblem also wie folgt umformuliert: Zunächst haben wir die Schwerpunktbewegung abseparіert. Aufgrund der Erhaltung des Gesamtimpulses sowie des Schwerpunktsatzes kann diese leicht als $\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{1}{m_1+m_2} \vec{P}\, t$ integriert werden (siehe Unterkapitel 4.1.2). Für die Relativkoordinate $\vec{r}$ verbleibt damit das durch definierte (4.31) effektive Einkörperproblem in einem externen Potential $V(\vec{r})$ sowie mit der in (4.29) definierten effektiven Masse μ. Mit der Lösung $\vec{r}(t)$ dieses effektiven Einkörperproblems können schließlich die ursprünglichen Bahnkurven $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ anhand von (4.27) rekonstruiert werden.

Es verbleibt die Aufgabe, das effektive Einkörperproblem zu lösen.

4.2.2 Bewegung im Zentralkraftfeld

Wir wenden uns nun der Lösung des Zentralproblems (4.31) zu. Dabei beschränken wir uns auf ein rotationsymmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$ mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}^2}$. Die Kraft zu einem solchen Potential

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\, V(r) = -\frac{\mathrm{d}\, V}{\mathrm{d}r}\, \vec{\nabla}\, \sqrt{\vec{r}^2} = -\frac{\mathrm{d}\, V}{\mathrm{d}r}\, \frac{\vec{r}}{r} \tag{4.32}$$

zeigt immer in radialer Richtung, d.h. in Richtung des Kraftzentrums bei $\vec{r} = \vec{0}$ (zumindest für den üblichen Fall attraktiver Kräfte mit $\frac{\mathrm{d}\, V}{\mathrm{d}r} \geq 0$; im repulsiven Fall zeigt die Kraft radial vom Kraftzentrum weg).

Aus der Annahme von Rotationssymmetrie folgt die Erhaltung des bereits in (3.173) eingeführten Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ des effektiven Einteilchenproblems. Da die Umrechnung des Gesamtdrehimpulses (4.16) auf das effektive Zentralproblem nicht trivial ist, prüfen wir die Erhaltung explizit nach:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \vec{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\vec{r} \times \mu\, \dot{\vec{r}} \right) = \dot{\vec{r}} \times \mu\, \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu\, \ddot{\vec{r}} = \mu \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \,. \tag{4.33}$$

Hierbei haben wir zunächst die Bewegungsgleichung verwendet, die in kartesischen Koordinaten die Form $\mu\, \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ annimmt. Das Verschwinden des ersten der beiden Kreuzprodukte ist offensichtlich. Das zweite Kreuzprodukt $\vec{r} \times \vec{F}$ verschwindet, da $\vec{F}$ parallel zu $\vec{r}$ ist (vgl. (4.32)) und $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$.

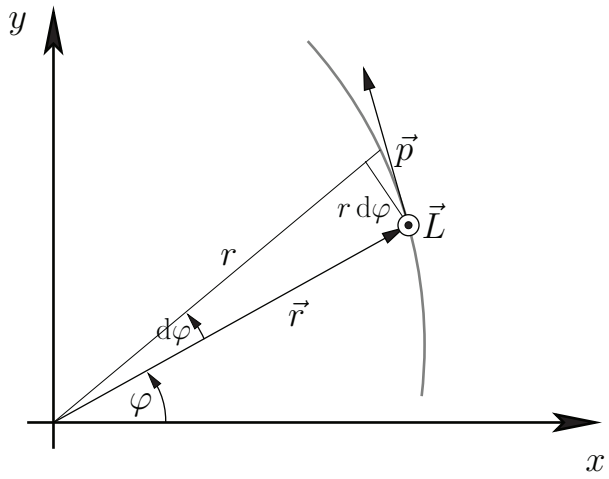


Abbildung 4.2: *Einkörperproblem im Zentralfeld. Eingezeichnet sind Ort $\vec{r}$, Impuls $\vec{p}$ und Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (senkrecht zur Zeichenebene, auf den Betrachter zeigend), sowie die vom Ortsvektor in der Zeit $\mathrm{d}t$ überstrichene Fläche.*

Zu einer festen Zeit definieren der Ort $\vec{r}$ und der Impuls $\vec{p}$ eine Ebene, auf der der Drehimpuls $\vec{L}$ senkrecht steht. Da $\vec{L}$ erhalten ist, liegen $\vec{r}$ und $\vec{p}$ auch zu jeder anderen Zeit in der zu $\vec{L}$ senkrechten Ebene; die Bewegung $\vec{r}(t)$ verläuft also komplett in dieser Ebene[8], siehe Abb. 4.2.

Wir legen das Kraftzentrum nun in den Ursprung und wählen wie in Abb. 4.2 skizziert in der zu $\vec{L}$ senkrechten Ebene Polarkoordinaten. Die Lagrangefunktion (4.31) lautet damit

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - V(r)\,. \tag{4.34}$$

Offensichtlich ist φ eine zyklische Koordinate, so dass der kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu\, r^2\,\dot{\varphi} \tag{4.35}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Wie bereits in Unterkapitel 3.5.1 erwähnt, entspricht p_φ der z-Komponente L_z des Drehimpulses in dem gewählten Koordinatensystem (das Koordinatensystem war so gewählt, dass die beiden anderen Komponenten verschwinden: $L_x = 0 = L_y$).

Die Erhaltung von p_φ hat eine anschauliche Bedeutung für die Fläche $\mathrm{d}A$, die der Ortsvektor $\vec{r}$ in einem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ überstreicht. Mit einer geometrischen Betrach-

[8] Der Spezialfall $\vec{L} = \vec{0}$ ist gesondert zu diskutieren. In diesem Fall sind $\vec{r}$ und $\vec{p}$ bzw. $\dot{\vec{r}}$ parallel und die Bewegung erfolgt entlang einer Geraden durch das Kraftzentrum. Auch in diesem Fall kann eine Ebene gewählt werden, die diese Gerade und damit die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ enthält.

tung von Abb. 4.2 sowie (4.35) andererseits folgt

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\, r^2\, \mathrm{d}\varphi = \frac{p_\varphi}{2\,\mu}\, \mathrm{d}t\,. \tag{4.36}$$

Wir haben also aus der Drehimpulserhaltung folgenden Erfahrungssatz abgeleitet:

> *Zweites Keplersches Gesetz (Flächensatz):* Der Fahrstrahl vom Kraftzentrum (Koordinatenursprung) zur Masse μ überstreicht in jeder Zeiteinheit $\mathrm{d}t$ die gleiche Fläche $\mathrm{d}A$.

Dieses Gesetz wurde 1609 von Johannes Kepler für unser Sonnensystem aufgestellt [15]. Tatsächlich gilt es für alle Zentralpotentiale $V(r)$, nicht nur das Gravitationspotential.

Die Lagrangefunktion (4.34) besitzt eine weitere uns bekannte Erhaltungsgröße, nämlich die *Energie*

$$E = \frac{\mu}{2}\,\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) + V(r)\,. \tag{4.37}$$

Anstelle die Lagrangegleichungen 2. Art für die beiden generalisierten Koordinaten r, φ aus der Lagrangefunktion des Zentralproblems (4.34) abzuleiten und zu integrieren, nehmen wir eine Abkürzung: Wir verwenden die beiden Erhaltungsgrößen p_φ und E, um Differentialgleichungen *erster* Ordnung für r und φ aufzustellen.

Zunächst lösen wir (4.35) nach

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu\, r^2} \tag{4.38}$$

auf und setzen das Ergebnis in die Energie (4.37) ein:

$$E = \frac{\mu}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r^2} + V(r)\,. \tag{4.39}$$

Dies können wir nun wieder nach $\dot{r}$ auflösen:

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}t} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\,\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r^2} - V(r)\right)}\,. \tag{4.40}$$

Nach Separation der Variablen kann dieser Ausdruck einmal integriert werden und man erhält das folgende Ergebnis:

$$t = t_0 \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\,\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r'^2} - V(r')\right)}}\,. \tag{4.41}$$

In (4.40) muß offensichtlich das positive bzw. negative Vorzeichen gewählt werden, wenn der Körper vom Koordinatenursprung wegläuft bzw. sich zu ihm hinbewegt. Folglich ist für Bahnbereiche, in denen r wächst (fällt), in (4.41) das positive (negative) Vorzeichen zu wählen. Die Radialbewegung $r(t)$ ergibt sich durch Umkehrung dieses Ausdrucks.

Ist $r(t)$ einmal berechnet, so kann dies in (4.38) eingesetzt und integriert werden. Man erhält damit den Winkel

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{p_\varphi}{\mu} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{r(t')^2} \,. \tag{4.42}$$

Die Integrale (4.41) und (4.42) stellen die formale Lösung des Zentralproblems dar, auch wenn sie im allgemeinen nicht explizit ausgewertet werden können. Hierbei treten die vier Integrationskonstanten r_0, ϕ_0, E und p_φ auf, die zu den vier Anfangswerten r_0, φ_0, $\dot{r}_0$ und $\dot{\varphi}_0$ äquivalent sind.

Oft ist es nicht notwendig, den vollen zeitlichen Verlauf der Bahnkurve $r(t)$, $\varphi(t)$ zu bestimmen, sondern es reicht aus, ihre Form $r(\varphi)$ zu kennen. Diese läßt sich bestimmen, indem man zunächst (4.38) und (4.40) zu

$$\frac{\mu\, r^2}{p_\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t = \pm \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r^2} - V(r)\right)}} \tag{4.43}$$

kombiniert. Nach einmaliger Integration findet man nun

$$\varphi(r) = \varphi_0 \pm \frac{p_\varphi}{\mu} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r'^2} - V(r')\right)}} \,. \tag{4.44}$$

Durch Umkehrung dieses formalen Ergebnisses erhält man $r(\varphi)$. Auch hier treten wieder vier Integrationskonstanten auf, die den vier Anfangsbedingungen entsprechen.

4.2.3 Effektives Potential

Die Integralausdrücke (4.41), (4.42) bzw. (4.44) stellen die formale Lösung des Zentralproblems dar. Im allgemeinen sind keine weiteren Vereinfachungen möglich, zumindest ohne Näherungen durchzuführen. Allerdings kann man mit Hilfe des *effektiven Potentials*

$$V_{\text{eff.}}(r) := V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r^2} \tag{4.45}$$

zumindest qualitative Einsichten in die Lösungen des Problems gewinnen. In (4.45) beschreibt der zusätzliche Term $\frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r^2}$ das *Zentrifugalpotential*.

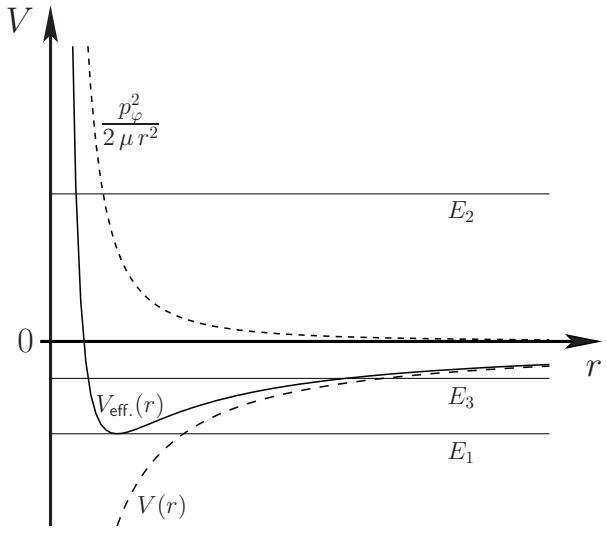


Abbildung 4.3: *Effektives Potential $V_{\text{eff.}}$ für ein Potential $V(r)$ vom Typ des Kepler-Potentials (4.48). Die gestrichelten Linien stellen die Komponenten $\frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}$ bzw. $V(r)$ dar, die durchgezogene Linie ist das resultierende effektive Potential $V_{\text{eff.}}$. Die dünnen horizontalen Linien korrespondieren zu verschiedenen Energien, die im Text diskutiert werden.*

Mit der Einführung von $V_{\text{eff.}}$ nimmt die Bewegungsgleichung (4.40) für den Bahnradius r die Form

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\,(E - V_{\text{eff.}}(r))}\,. \tag{4.46}$$

an. Hierbei ist die Energie weiterhin durch (4.39) gegeben, die mit (4.45) die Form

$$E = \frac{\mu}{2}\,\dot{r}^2 + V_{\text{eff.}}(r) \tag{4.47}$$

annimmt. Die Gleichungen (4.46) und (4.39) beschreiben eine effektive *eindimensionale* Bewegung in dem effektiven Potential $V_{\text{eff.}}$. Dabei ignoriert man zunächst die Dynamik des Winkels φ und beschreibt eine aufgrund der Erhaltung von p_φ feste Flächengeschwindigkeit durch einen geeigneten Zentrifugal-Beitrag in dem effektiven Potential. Die effektive Lagrangefunktion, die auf die Energie (4.39) und damit die Bewegungsgleichung (4.46) führt, lautet $L_{\text{eff.}} = T - V_{\text{eff.}} = \frac{\mu}{2}\,\dot{r}^2 - V_{\text{eff.}}$ und unterscheidet sich damit von der physikalischen Lagrangefunktion (4.34).

Das effektive Potential (4.45) erlaubt eine qualitative Diskussion der möglichen Bahnkurven für ein beliebiges Potential $V(r)$. Wir wollen dies am Beispiel des *Kepler-Potentials*

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{4.48}$$

illustrieren, bevor wir in Unterkapitel 4.2.4 die Bahnkurve für dieses Potential explizit berechnen. Mit $\alpha = m_1\, m_2\, G$ beschreibt das Potential (4.48) die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern der Massen m_1 und m_2, wobei G die Gravitationskonstante ist.

Abb. 4.3 zeigt das effektive Potential $V_{\text{eff.}}$ für das Kepler-Potential (4.48). Für große r dominiert das attraktive Potential $V(r)$, für kleine r hingegen das repulsive Zentrifugalpotential $\frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\, r^2}$. In der Summe ergibt sich ein Verhalten, das für kleine r repulsiv und für große r attraktiv ist, also ein Minimum bei einem Radius r_0 aufweist. Aus der Bedingung

$$0 = -\left.\frac{\mathrm{d}\, V_{\text{eff.}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{r_0^2} + \frac{p_\varphi^2}{\mu\, r_0^3} \tag{4.49}$$

ergibt sich $r_0 = \frac{p_\varphi^2}{\alpha\,\mu}$ und $V_{\text{eff.}}(r_0) = -\frac{\alpha^2\,\mu}{2\,p_\varphi^2}$.

Eine Bewegung mit Energie E kann nur solche Bahnradien r annehmen, für die $E \geq V_{\text{eff.}}(r)$ ist. Somit ist eine Bewegung mit $E < V_{\text{eff.}}(r_0)$ nicht möglich. Für $E = E_1 = V_{\text{eff.}}(r_0)$ ist der einzige erlaubte Bahnradius $r = r_0$ (vgl. Abb. 4.3). Damit ist $\dot{r} = 0$ für alle Zeiten. Nach (4.38) ist damit $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu\, r_0^2}$ konstant. Für $E = E_1$ ist die Bewegung also eine *Kreisbahn*, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ durchlaufen wird. Erinnern wir uns, dass der Ausdruck (4.49) die in radialer Richtung wirkende Kraft beschreibt. Die Bedingung für eine Kreisbahn ist somit, dass der Betrag der Gravitationskraft $\frac{\alpha}{r^2}$ gerade gleich dem Betrag der Zentrifugalkraft $\frac{p_\varphi^2}{\mu\, r^3} = \mu\, r\, \dot{\varphi}^2$ ist, so dass sich beide wegheben.

Wir wenden uns nun dem Fall $E = E_2 > \lim_{r\to\infty} V_{\text{eff.}}(r)$ $(= 0$ im Fall des Kepler-Potentials (4.48)) zu. Wie man Abb. 4.3 sieht, gibt es in diesem Fall einen minimalen Bahnradius $r_{\text{min.}}$, so dass $r \geq r_{\text{min.}}$ für alle Zeiten gelten muß. Die erlaubten Bahnradien sind in diesem Fall allerdings nach oben unbeschränkt, so dass sich eine *ungebundene* Bewegung ergibt. Tatsächlich wird der Körper sowohl im Grenzfall $t \to -\infty$ wie auch $t \to \infty$ ins Unendliche laufen, d.h. $r \to \infty$. Es ergibt sich somit eine Zeit t_0, so dass $\dot{r} < 0$ für $t < t_0$ und $\dot{r} > 0$ für $t > t_0$. Bei $t = t_0$ erreicht der Körper den minimalen Bahnradius $r_{\text{min.}}$ und kehrt dort seine Bewegungsrichtung um, d.h. $\dot{r} = 0$ bei $r = r_{\text{min.}}$. Aufgrund der Erhaltung von p_φ lesen wir aus (4.35) ab, dass der Körper seine Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu\, r^2}$ für zunehmende Bahnradien reduziert. Eine genauere Aussage erhalten wir mit Hilfe von (4.44). Setzen wir (4.45) ein, so lautet der Integral-Ausdruck für die Winkel-Variable

$$\varphi(r) = \varphi_0 \pm \frac{p_\varphi}{\mu} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\,\left(E - V_{\text{eff.}}(r')\right)}}\,. \tag{4.50}$$

Für den Fall, dass das effektive Potential wie in dem konkreten Fall des Kepler-Potentials (4.48) nach unten beschränkt ist und mit der Energie $E = E_2$, gilt

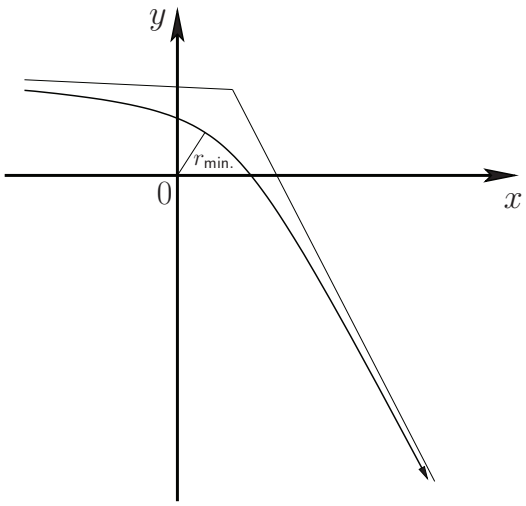


Abbildung 4.4: *Ungebundene Bahn (dicke Linie) in einem Potential $V(r)$ vom Kepler-Typ (4.48). Die dünnen Linien zeigen die Asymptotik der Bewegung für $r \to \infty$.*

$0 \leq \lim_{r\to\infty}(E - V_{\text{eff.}}(r)) \leq C$ mit einer Konstanten $C < \infty$. Somit exisitiert der Limes $r \to \infty$ des Integrals (4.50), d.h. $\varphi(r)$ besitzt einen endlichen Grenzwert. Diese qualitativen Betrachtungen zeigen, dass der Körper asymptotisch entlang einer Geraden ins Unendliche laufen muß. Eine Bahnkurve $r(\varphi)$ mit Energie $E = E_2$ können wir also wie in Abb. 4.4 skizzieren, ohne sie explizit berechnen zu müssen.

Schließlich sei noch der in Abb. 4.3 skizzierte Fall $E = E_3$ betrachtet. In diesem Fall exisitiert neben dem minimalen auch ein maximaler Bahnradius $r_{\text{max.}}$, so dass $E \geq V_{\text{eff.}}(r)$ nur für $r_{\text{min.}} \leq r \leq r_{\text{max.}}$ gilt. Diese Einschränkung der erlaubten Bahnradien führt zu einer *gebundenen* Bewegung: Sowohl für $r = r_{\text{min.}}$ als auch $r = r_{\text{max.}}$ muß sich die Richtung der radialen Bewegung umkehren, so dass an diesen Stellen $\dot{r} = 0$ gilt. Bei der Rekonstruktion der zweidimensionalen Bewegung ist noch der Winkel φ zu berücksichtigen. Nach (4.38) wird die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ zwischen zwei Werten $\dot{\varphi}_{\text{min.}}$ und $\dot{\varphi}_{\text{max.}}$ schwanken, ohne jedoch durch Null zu gehen. Das Vorzeichen von $\dot{\varphi}$ ist für die Bewegung somit immer gleich. Die Bewegung wird also im allgemeinen wie in Abb. 4.5 skizziert verlaufen (wie wir in Unterkapitel 4.2.4 sehen werden, trifft diese Skizze tatsächlich für das ideale Kepler-Potential (4.48) *nicht* zu). Eine Entscheidung, ob die Bahnkurve offen oder geschlossen (d.h. die Bewegung periodisch) ist, erfordert ihre explizite Berechnung. Durchwandert der Bahnradius r einen vollen Zyklus von $r_{\text{min.}}$ nach $r_{\text{max.}}$ und wieder zurück, so ändert sich der Winkel φ nach (4.50) um den

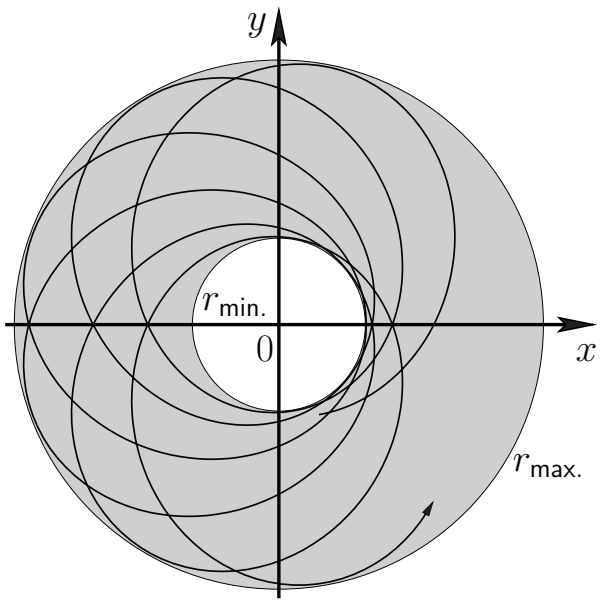


Abbildung 4.5: *Skizze einer gebundenen Bahn. Der grau schraffierte Bereich zeigt erlaubte Bahnradien* $r_{\text{min.}} \leq r \leq r_{\text{max.}}$.

Wert

$$\Delta\varphi = 2\,\frac{p_\varphi}{\mu} \int\limits_{r_{\text{min.}}}^{r_{\text{max.}}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\,(E - V_{\text{eff.}}(r))}}\,. \tag{4.51}$$

Die Bahnkurve ist genau dann geschlossen, wenn $\Delta\varphi$ ein rationales Vielfaches von $2\,\pi$ ist:

$$\Delta\varphi = 2\,\pi\,\frac{k}{l}\,, \qquad k, l \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.52}$$

In diesem Fall führt der Winkel φ im Verlauf von l Radialzyklen k Umläufe aus, so dass der Körper zu seiner Ausgangsposition zurückkehrt und die Bahn sich schließt. Der weiter oben betrachtete Fall $E = E_1$ ergibt sich als Spezialfall der hier diskutierten Situation mit $r_{\text{max.}} = r_{\text{min.}} = r_0$. In diesem Fall findet keine radiale Bewegung statt und man erhält eine Kreisbahn, die natürlich geschlossen ist.

Tatsächlich gibt es eine allgemeinere Aussage über die Geschlossenheit von Bahnkurven in Potentialen der Form

$$V(r) = -a\,r^n\,, \tag{4.53}$$

die als *Betrands Theorem* bekannt ist: Lediglich für $n = -1$ und $n = 2$ sind *alle* gebundenen Bahnen auch geschlossen (siehe [3] und z.B. Kapitel 3.6 von [11]). Man beachte, dass der Fall $n = -1$ gerade dem Kepler-Potential (4.48) entspricht.

Wir haben bei der Diskussion des effektiven Potentials $V_{\text{eff.}}$ zwar an das Kepler-Potential (4.48) gedacht. Allerdings handelt es sich um qualitative Überlegungen, die die explizite Form des Potentials nicht wirklich benötigen. Somit sind diese Überlegungen für eine größere Klasse *attraktiver* Potentiale gültig, die ähnliche Eigenschaften wie das Kepler-Potential besitzen. Weist ein Potential $V(r)$ bei $r = 0$ eine Singularität auf, die schwächer ist als r^{-2}, d.h. $n > -2$ für ein Potential der Form (4.53), so dominiert das Zentrifugalpotential $\frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\,r^2}$ das Verhalten von $V_{\text{eff.}}$ im Ursprung. Somit ergibt sich für $p_\varphi \neq 0$ und $n > -2$ eine *Zentrifugal-* oder *Drehimpuls-Barriere*, die verhindert, dass ein minimaler Abstand $r_{\text{min.}}(E, p_\varphi)$ unterschritten wird. Im Spezialfall $n = -2$ konkurrieren die führenden Singularitäten von $V(r)$ und $\frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\,r^2}$ bei $r = 0$, so dass ggfs. Korrekturen höherer Ordnung zu berücksichtigen sind.

Fällt das attraktive Potential $V(r)$ im Unendlichen langsamer ab als r^{-2}, d.h. wieder $n > -2$ für ein Potential der Form (4.53), so dominiert das Potential $V(r)$ das Verhalten von $V_{\text{eff.}}$ im Unendlichen. Für Potentiale, die sich global wie (4.53) mit $n > -2$ verhalten, erhält man somit ein repulsives Verhalten von $V_{\text{eff.}}(r)$ für kleine r und ein attraktives Verhalten für große r. Ist $V(r)$ für $r \to \infty$ unbeschränkt, d.h. $n > 0$ für Potentiale der Form (4.53), so sind alle Bewegungen gebunden. Andernfalls treten für hinreichend hohe Energien auch ungebundene Bewegungen auf.

4.2.4 Keplerproblem

Wir wollen nun versuchen, die Bahnkurven $\vec{r}(t)$, oder zumindet ihre Form $r(\varphi)$ explizit zu berechnen. Es ist plausibel, dass eine allgemeine Lösung auf Probleme stößt, wenn es gebundene Bahnen gibt, für die $r(\varphi)$ keine periodische Funktion von φ ist. Betrands Theorem legt somit nahe, dass die Bahnkurven in Potentialen der Form (4.53) genau für $n = -1$ und 2 explizit berechenbar sind.

Betrachten wir zunächst den Fall $n = 2$. Hierbei handelt es sich um den dreidimensionalen *harmonischen Oszillator*, dessen Potential wir als

$$V(r) = \frac{k}{2}\, r^2 \tag{4.54}$$

schreiben wollen. Die zugehörigen drei Bewegungsgleichungen

$$\mu\, \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\, V(r) = -\frac{k}{2}\, \vec{\nabla}\, \vec{r}^{\,2} = -k\, \vec{r} \tag{4.55}$$

enkoppeln in kartesischen Koordinaten x, y, z. Man erhält somit drei ungekoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren mit Kraftkonstante k und Masse μ, die sich leicht lösen lassen. Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist somit explizit berechenbar.

Wenden wir uns nun dem Fall $n = -1$, d.h. dem Kepler-Potential (4.48) zu. In diesem Fall können wir den Integralausdruck (4.44) mit Hilfe der Substitution $u = 1/r'$, d.h. $\mathrm{d}r'/r'^2 = -\mathrm{d}u$ auf die Form

$$\varphi(r)-\varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2 \sqrt{\frac{2\,\mu}{p_\varphi^2}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\,r'^2} + \frac{\alpha}{r'}\right)}} = \pm \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2\,\mu\,E}{p_\varphi^2} + \frac{2\,\mu\,\alpha}{p_\varphi^2}\,u - u^2}} \tag{4.56}$$

bringen. Dieses Integral ist bekannt, so dass man $r(\varphi)$ im Prinzip auf diesem Weg berechnen kann.

Es gibt allerdings auch andere Wege zur Bestimmung von $r(\varphi)$. Vielleicht der elementarste beginnt bei der Bewegungsgleichung für die Lagrangefunktion (4.34), die mit dem Kepler-Potential (4.48)

$$0 = \mu\,\ddot{r} - \mu\,r\,\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2} = \mu\,\ddot{r} - \frac{p_\varphi^2}{\mu\,r^3} + \frac{\alpha}{r^2} \tag{4.57}$$

lautet, wobei wir $\dot{\varphi}$ gleich mit Hilfe von (4.38) eliminiert haben. Wir verwenden nochmals (4.38) in der Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\varphi}{\mu\,r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$, um die Zeitableitung in eine Winkelableitung umzuschreiben. Bringen wir in (4.57) die letzten beiden Terme außerdem auf die andere Seite und dividieren durch $\frac{p_\varphi^2}{\mu\,r^2}$, so finden wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\varphi}\right) = \frac{1}{r} - \frac{\mu\,\alpha}{p_\varphi^2}\,. \tag{4.58}$$

Nun bietet sich die Substitution

$$y = \frac{1}{r} - \frac{\mu\,\alpha}{p_\varphi^2}\,, \tag{4.59}$$

d.h. $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\varphi}$ an. Damit vereinfacht sich (4.58) zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\varphi}\right) = -y\,. \tag{4.60}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet $y(\varphi) = \frac{\epsilon\,\mu\,\alpha}{p_\varphi^2}\,\cos(\varphi-\varphi_0)$ mit den beiden Integrationskonstanten φ_0 und ϵ (die zusätzlichen Vorfaktoren haben wir so gewählt, dass das Endergebnis besonders einfach aussieht). Unter Berücksichtigung von (4.59) finden wir für die Bahn

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{\mu\,\alpha}{p_\varphi^2}\,\left(1 + \epsilon\,\cos(\varphi - \varphi_0)\right)\,. \tag{4.61}$$

Die Konstante ϵ bestimmt die Form der Bahn und wird als *Exzentrizität* bezeichnet. Wir wollen sie nun durch die Energie E ausdrücken. Dazu verwenden wir (4.39) und setzen die Lösung (4.61) ein (wir verzichten allerdings darauf, die elementaren Umformungen dieses Ausdrucks mit Hilfe der Additionstheoreme für $\cos$ und $\sin$ explizit anzugeben):

$$E = \frac{1}{2\,\mu}\left(\frac{p_\varphi}{r^2}\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\,r^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{(\epsilon^2-1)\;\mu\,\alpha^2}{2\,p_\varphi^2}\,. \tag{4.62}$$

Die Exzentrizität lautet somit als Funktion der Energie E

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,p_\varphi^2\,E}{\mu\,\alpha^2}}\,, \tag{4.63}$$

wobei wir die Periodizität $\cos(x+\pi) = -\cos x$ verwenden, um die positive Wurzel zu wählen.

Ein anderer Zugang zur Lösung des Kepler-Problems beruht darauf, dass genau für das Kepler-Potential (4.48) eine weitere Erhaltungsgröße existiert, nämlich

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha}{r}\,\vec{r}. \tag{4.64}$$

Diese Erhaltungsgröße wird *Lenz-Runge-Vektor* genannt. Ihre erste Entdeckung dürfte ca. 300 Jahre zurückliegen, sie wurde jedoch durch Runge [26] und Lenz [21] besonders bekannt gemacht. Diese zusätzliche Erhaltungsgröße erklärt, warum die Bahnen gerade für das Kepler-Potential (4.48) explizit berechnet werden können. Darüber hinaus ist die Existenz einer expliziten Lösung aufgrund der herausragenden Bedeutung des Gravitationspotentials für die Astronomie ein großer Glücksfall.

Wir kehren zurück zur Bahnkurve (4.61). Zunächst stellen wir fest, dass der geringste Radius

$$r_{\text{min.}} = \frac{p_\varphi^2}{\mu\,\alpha}\,\frac{1}{1+\epsilon} \tag{4.65}$$

im Fall $\epsilon > 0$ für den Winkel $\varphi = \varphi_0$ angenommen wird. Der Winkel φ_0 wird daher als *Perihel* bezeichnet. Es ist ferner nützlich, folgende Fälle zu unterscheiden:

(i) $\epsilon = 0$: Die Bahn ist ein *Kreis* mit Radius $r = \frac{\mu\,\alpha}{p_\varphi^2}$. Die Energie lesen wir aus (4.63) zu $E = -\frac{\mu\,\alpha^2}{2\,p_\varphi^2} < 0$ ab (vgl. auch Diskussion unter (4.49)).

(ii) $0 < \epsilon < 1$: In diesem Fall ist (4.61) die Gleichung für eine *Ellipse*, in deren einem Brennpunkt B_1 das Kraftzentrum bei $r = 0$ sitzt, siehe Abb. 4.6. Dies entspricht einer Aussage, die Kepler [15] für unser Sonnensystem wie folgt formuliert hat:

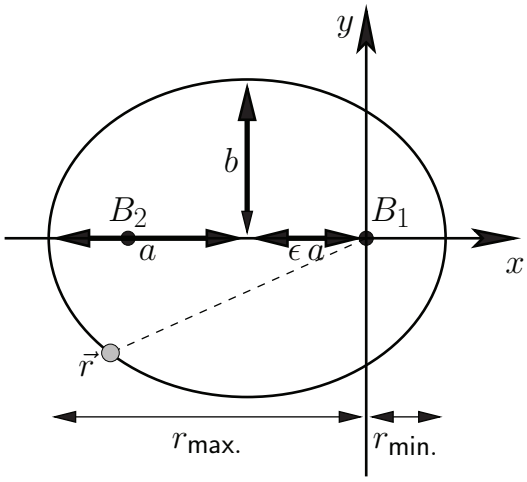


Abbildung 4.6: *Elliptische Bahn. Wir wählen die x-Achse in Richtung des Winkels φ_0, so dass wir in (4.61) $\varphi_0 = 0$ setzen können.*

Erstes Keplersches Gesetz: Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Der größte („sonnenfernste“) Abstand

$$r_{\text{max.}} = \frac{p_\varphi^2}{\mu\,\alpha}\,\frac{1}{1-\epsilon} = (1+\epsilon)\,a \tag{4.66}$$

wird für $\varphi = \varphi_0 + \pi$ angenommen. Diesen Ort bezeichnet man auch als *Aphel*. Aus (4.65) und (4.66) finden wir die große Halbachse der Ellipse zu

$$a = \frac{r_{\text{min.}} + r_{\text{max.}}}{2} = \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\,\alpha}\left(\frac{1}{1+\epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon}\right) = \frac{p_\varphi^2}{\mu\,\alpha}\,\frac{1}{1-\epsilon^2} = -\frac{\alpha}{2\,E}\,, \tag{4.67}$$

wobei wir im letzten Schritt (4.62) verwendet haben.
Wir wollen noch eine Aussage über die Umlaufzeit T machen. Dazu integrieren wir zunächst den Flächensatz (4.36) über eine komplette Priode

$$A = \int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\varphi\,T}{2\,\mu}\,. \tag{4.68}$$

Andererseits kann man die Fläche einer Ellipse aus ihren Halbachsen bestimmen. Dazu benötigen wir die kleine Halbachse b. Mit Hilfe der Charakterisierung

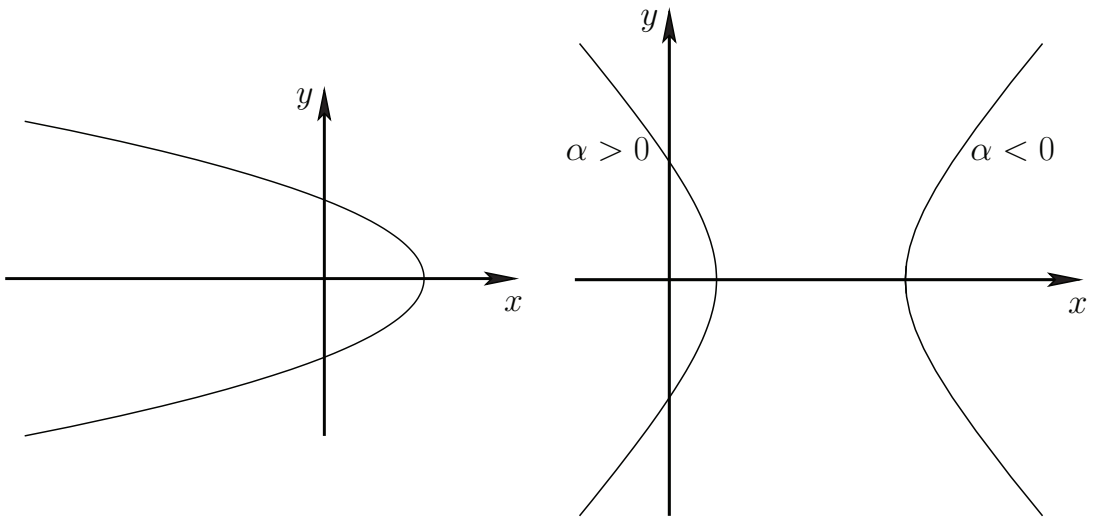


Abbildung 4.7: *Parabelbahn (links) und Hyperbelbahnen (rechts). Die x-Achse liegt wie bereits in Abb. 4.6 in Richtung des Winkels φ_0.*

einer Ellipse durch die Aussage, dass die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten konstant ist und Betrachtung von Abb. 4.6 findet man

$$b = \sqrt{1-\epsilon^2}\, a = \frac{p_\varphi}{\sqrt{\mu\,\alpha\,a}}\, a = \frac{p_\varphi\,\sqrt{a}}{\sqrt{\mu\,\alpha}}\,, \tag{4.69}$$

wobei wir $1-\epsilon^2$ mit Hilfe von (4.67) eliminiert haben. Wir finden damit die Fläche

$$A = \pi\, a\, b = \pi\, \frac{p_\varphi}{\sqrt{\mu\,\alpha}}\, a^{3/2}\,. \tag{4.70}$$

Vergleich mit (4.68) ergibt für die Umlaufzeit

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\, a^{3/2}\,. \tag{4.71}$$

Diese Aussage gilt zunächst für einen Körper der Masse μ in einem äußeren Zentralpotential. Für zwei Körper der Massen m_1 und m_2, die gravitativ wechselwirken, gilt (beachte die Definition (4.29) der reduzierten Masse und $\alpha = m_1\, m_2\, G$)

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{1}{G\,(m_1+m_2)}\,. \tag{4.72}$$

Ist nun die Masse m_1 viel größer als m_2, so nimmt (4.71) die Form $T \approx 2\,\pi\,\frac{1}{\sqrt{G\,m_1}}\, a^{3/2}$ an, mit einem Vorfaktor der unabhängig von der Masse m_2 ist. In dieser *Näherung* finden wir somit das 1619 publizierte [16]

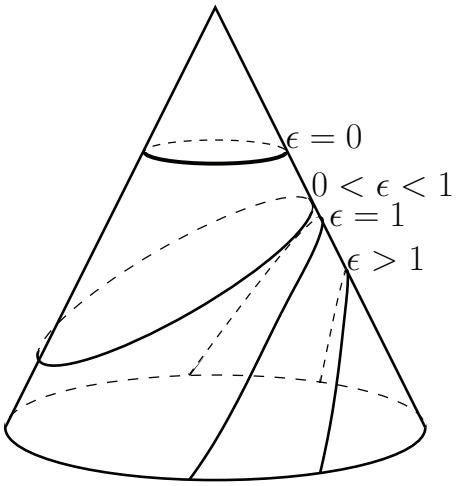


Abbildung 4.8: *Die vier Typen von Kegelschnitten: (i) Kreis ($\epsilon = 0$), (ii) Ellipse ($0 < \epsilon < 1$), (iii) Parabel ($\epsilon = 1$) und (iv) Hyperbel ($\epsilon > 1$).*

> *Dritte Keplersche Gesetz:* Das Quadrat der Umlaufzeit T eines Planeten um die Sonne ist proportional zu der dritten Potenz seiner großen Halbachse a, wobei die Proportionalitätskonstante für alle Planeten gleich ist.

(iii) $\epsilon = 1$: Die Bahn verläuft wie links in Abb. 4.7 skizziert auf einer *Parabel*. Aus (4.62) liest man ab, dass in dem Fall $\epsilon = 1$ die Energie $E = 0$ ist.

(iv) $\epsilon > 1$: Die Bahn verläuft wie rechts in Abb. 4.7 skizziert auf einer von zwei möglichen *Hyperbeln*. Man beachte, dass es für $\epsilon > 0$ einen Bereich von Winkeln gibt, in dem $1+\epsilon\,\cos(\varphi-\varphi_0) < 0$ ist. Da $r(\varphi)$ in (4.61) nicht-negativ sein sollte, ist dieser Winkelbereich für den attraktiven Fall $\alpha > 0$ auszuschließen. Im repulsiven Fall $\alpha < 0$ entspricht dagegen ausschließlich dieser Winkelbereich tatsächlichen Bahnkurven. Daraus ergibt sich die Zuordnung der beiden Parabeln zu Lösungen für $\alpha > 0$ bzw. < 0 wie rechts in Abb. 4.7 skizziert.
Aus (4.62) liest man ab, dass die Energie für $\epsilon > 1$ positiv ist: $E > 0$. Qualitativ hatten wir diesen Bahnverlauf bereits aus der Diskussion des effektiven Potentials $V_{\text{eff.}}$ abgeleitet und in Abb. 4.4 skizziert.

Man beachte, dass für ein repulsives Potential ($\alpha < 0$) ausschließlich Hyperbel-Bahnen existieren. Aus (4.61) liest man nämlich ab, dass der Bahnradius r für $\epsilon \leq 1$ das gleiche Vorzeichen wie α besitzt, so dass die Fälle (i)–(iii) keine erlaubten Lösungen für $\alpha < 0$ darstellen.

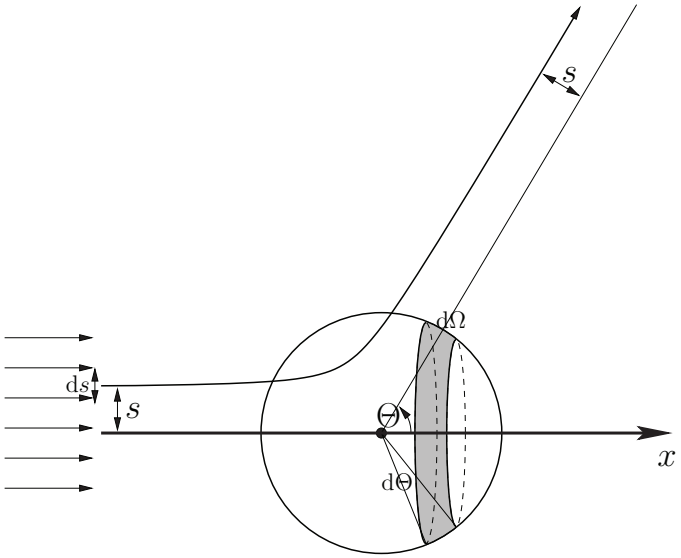


Abbildung 4.9: *Streuprozeß: Ein Teilchen, das mit dem Stoßparameter s in x-Richtung einfällt, wird von dem Potential in einen Winkel Θ zur x-Achse gestreut.*

Alle vier Bahntypen lassen sich als *Kegelschnitte*, d.h. als Schnitt von einem Kreiskegel mit einer Ebene, interpretieren, siehe Abb. 4.8.

4.2.5 Streuung in einem Zentralpotential

Im folgenden sollen die ungebundenen Bahnen in einem Zentralpotential noch einmal unter einem statistischen Gesichtspunkt analysiert werden. Dabei haben wir primär repulsive Potentiale im Blickfeld, obwohl die Diskussion genauso für Streuung an attraktiven Potentialen gilt.

Betrachten wir zunächst ein Teilchen, das wie in Abb. 4.9 skizziert aus großer Entfernung entlang der x-Achse auf das Kraftzentrum zufliegt. Nach der Wechselwirkung mit dem Kraftzentrum wird es asymptotisch in eine andere Richtung weiterfliegen, wobei es einen Winkel Θ mit der x-Achse annimmt und um einen Winkel $\Delta\Phi$ in der y-z-Ebene abgelenkt wird. Wiederholt man dieses Experiment sehr oft und variiert dabei den *Stoßparameter* s, d.h. den Abstand der asymptotischen Geraden, entlang der das Teilchen einfällt, von der x-Achse, so kann man wichtige Einsichten in das Potential $V(r)$ gewinnen.

Tatsächlich betrachtet man für gewöhnlich eine große Anzahl von Teilchen, die mit einer bestimmten Rate auf das Kraftzentrum einfallen. Dabei ist die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ parallel zur x-Achse. Man nimmt ferner an, dass die eingeschosse-

nenen Teilchen senkrecht zur Einfallsrichtung gleichverteilt sind. Dann führt man den *differentiellen Wirkungsquerschnitt* wie folgt ein:

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\text{Anzahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel } \mathrm{d}\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Anzahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in eine Einheitsfläche einfallen}}\,. \tag{4.73}$$

Hierbei ist $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\Phi$ ein Raumwinkelelement, durch das gestreute Teilchen mit der Richtung $\Omega = (\Theta, \Phi)$ fliegen. In manchen Lehrbüchern wie z.B. [10,18] wird der differentielle Wirkungsquerschnitt nicht mit $\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}$, sondern mit $\sigma(\Theta, \Phi)$ bezeichnet.

Wichtig ist auch der *totale Wirkungsquerschnitt*

$$\sigma_{\text{tot.}} := \int\limits_{\text{Kugeloberfläche}} \mathrm{d}\Omega\,\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}\,. \tag{4.74}$$

Unsere Aufgabe ist es nun, für ein gegebenes Potential $V(\vec{r})$ diese Größen zu berechnen, wobei wir uns auf kugelsymmetrische Potentiale $V(\vec{r}) = V(r)$ konzentrieren wollen. Dazu nehmen wir zunächst an, dass das Potential mit zunehmendem Abstand r vom ruhenden Kraftzentrum gegen Null geht

$$\lim_{r\to\infty} V(\vec{r}) = 0\,. \tag{4.75}$$

Bei einem kugelsymmetrischen Potential $V(\vec{r}) = V(r)$, das ungebundene Bahnkurven zuläßt, kann diese Bedingung durch Addition einer Konstanten erreicht werden.

Mit dieser Annahme ist die Energie der einfallenden Teilchen $E = \frac{\mu}{2}\,\vec{v}_0^{\,2}$. Der Drehimpuls der Teilchen bzgl. des Kraftzentrums ergibt sich mit einer geometrischen Überlegung (vgl. Abb. 4.9) zu

$$p_\varphi = \left|\vec{L}\right| = \mu\,v_0\,s = \sqrt{2\,\mu\,E}\,s\,. \tag{4.76}$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie von $V(r)$ hängt der der Wirkungsquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}$ nicht vom Azimutwinkel Φ ab. Wir wählen deswegen als infinetisemalen Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ die Fläche des grau schraffierten Ringes auf der Einheitskugel in Abb. 4.9

$$\mathrm{d}\Omega = 2\,\pi\,\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta\,. \tag{4.77}$$

Nach Abb. 4.9 ist die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in einem Intervall $\mathrm{d}s$ um den Stoßparameter s einfallen, gleich der Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in den grauen Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ gestreut werden:

$$|2\,\pi\,s\,\mathrm{d}s| = \left|\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Theta)}{\mathrm{d}\Omega}\,2\,\pi\,\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta\right|\,. \tag{4.78}$$

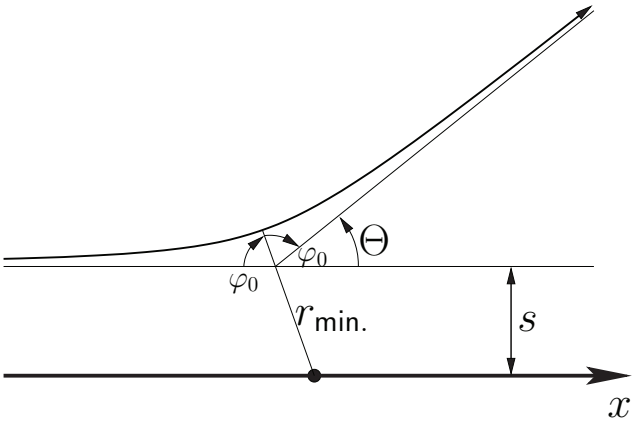


Abbildung 4.10: *Winkel bei einem Streuprozeß in einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$. Man beachte die Symmetrie zwischen ein- und auslaufenden Teilchen.*

Die linke Seite ist die Fläche des Kreisrings, durch die die Teilchen mit Stoßparametern im Intervall $[s, s+\mathrm{d}s]$ einfallen. Wir haben auf beiden Seiten von (4.78) Betragszeichen eingeführt, um die Positivität der Teilchenzahlen sicherzustellen, ohne uns über die Vorzeichen der Ausdrücke Gedanken machen zu müssen. Wir lösen nun (4.78) auf (man beachte, dass der Streuwinkel Θ zwischen 0 und π liegt):

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Theta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Theta}\right| . \tag{4.79}$$

Damit ist die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts auf die Berechnung der Funktion $\Theta(s)$ reduziert, die anschließend lediglich noch einmal nach s abgeleitet werden muß.

Einerseits gilt für den Winkel φ_0 im Perihel nach (4.44)

$$\varphi_0 = \varphi(r=\infty) - \varphi(r_{\mathsf{min.}}) = \frac{p_\varphi}{\mu}\int\limits_{r_{\mathsf{min.}}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\,r^2}\right)}} . \tag{4.80}$$

Andererseits ist die Bewegung im Zentralkraftfeld symmetrisch, so dass man aus Abb. 4.10 abliest

$$\begin{aligned}\Theta(s) &= \pi - 2\,\varphi_0 = \pi - 2\int\limits_{r_{\mathsf{min.}}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2\,\mu\,E}{p_\varphi^2}\left(1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{p_\varphi^2}{2\,\mu\,r^2\,E}\right)}} \qquad (4.81)\\ &= \pi - 2\,s\int\limits_{r_{\mathsf{min.}}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{s^2}{r^2}}} = \pi - 2\,s\int\limits_{0}^{1/r_{\mathsf{min.}}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2\,u^2}} .\end{aligned}$$

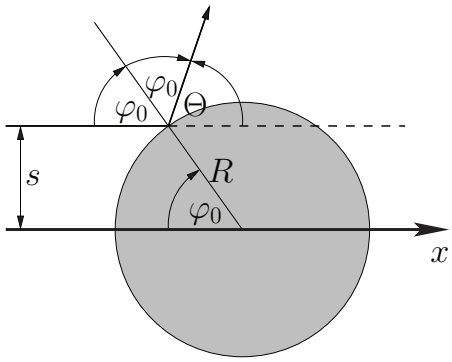


Abbildung 4.11: *Elastische Streuung an einer harten Kugel mit Radius R.*

Hierbei haben wir zunächst mit Hilfe von (4.76) $\frac{p_\varphi^2}{2\,\mu} = E\,s^2$ eliminiert und anschließend $u = 1/r$ substituiert.

Beispiel: Elastische Streuung an einer harten Kugel. Wir betrachten die in Abb. 4.11 skizzierte elastische Streuung eines Teilchens an einer harten Kugel mit Radius R. Dabei hat das Potential die Form

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r < R\,, \\ 0 & \text{für } r > R\,. \end{cases} \tag{4.82}$$

In diesem Fall ist $r_{\text{min.}} = R$ und es sind nur Bewegungen mit $E > 0$ erlaubt. Das Integral (4.81) wird somit besonders einfach und kann ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \pi - 2\,s \int\limits_0^{1/R} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - s^2\,u^2}} = \pi - 2\,\tan^{-1} \frac{s\,u}{\sqrt{1 - s^2\,u^2}}\bigg|_0^{1/R} \\ &= \pi - 2\,\tan^{-1} \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}\,. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Man kann dann $\sin\Theta$ und $\frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}s}$ als algebraische Ausdrücke in R und s darstellen und findet schließlich mit (4.79)

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Theta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\frac{s}{\sin\Theta}}{\left|\frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}s}\right|} = \frac{R^2}{4}\,. \tag{4.84}$$

Kürzer und direkter ist es jedoch, den Stoßparameter s mit Hilfe einer geometrischen Betrachtung aus Abb. 4.11 als Funktion von Θ abzulesen. Zunächst gilt wie zuvor $\Theta = \pi - 2\,\varphi_0$, wobei φ_0 der Winkel der Bahnkurve mit der Normalen auf der Kugeloberfläche ist. Man findet damit

$$s = R\,\sin\varphi_0 = R\,\sin\left(\frac{\pi - \Theta}{2}\right) = R\,\cos\frac{\Theta}{2} \tag{4.85}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Theta} = -\frac{R}{2}\,\sin\frac{\Theta}{2}\,. \tag{4.86}$$

Andererseits gilt unter Beachtung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen sowie von (4.85):

$$\frac{\sin\Theta}{s} = \frac{2}{s}\,\cos\frac{\Theta}{2}\,\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{2}{R}\,\sin\frac{\Theta}{2}\,. \tag{4.87}$$

Schließlich setzen wir (4.86) und (4.87) in (4.79) ein und finden wie zuvor

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Theta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{s}{\sin\Theta}\,\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Theta}\right| = \frac{R^2}{4}\,. \tag{4.88}$$

Mit diesem Ergebnis für den differentiellen Wirkungsquerschnitt findet man den in (4.74) definierten totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\mathrm{tot.}} = \int \mathrm{d}\Omega\,\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Theta)}{\mathrm{d}\Omega} = 2\,\pi\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\Theta\,R\,\sin\Theta\,\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Theta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi\,R^2}{2}\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\Theta\,\sin\Theta = \pi\,R^2\,. \tag{4.89}$$

Im Fall einer harten Kugel mit Radius R ist der totale Wirkungsquerschnitt also die Querschnittsfläche der Kugel. Dies erklärt sowohl die Begriffsbildung als auch die Normierung.

Es sei noch (ohne Herleitung) erwähnt, dass eine Rechnung für das Kepler-Potential (4.48) den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma(\Theta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4}\,\left(\frac{\alpha}{2\,E}\right)^2\,\frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}} \tag{4.90}$$

ergibt. Setzt man $\alpha = -Z_1\,Z_2\,e^2/(4\,\pi\,\varepsilon_0)$ für die Coulomb-Wechselwirkung zwischen einfallenden Teilchen der Ladung $Z_1\,e$ und einem punktförmigen Streuzentrum der Ladung $Z_2\,e$ ein, so erhält man Rutherfords berühmte Streuformel [27]. Man beachte, dass die Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen des gleichen Vorzeichens repulsiv und für zwei Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen attraktiv ist. Im Ergebnis (4.90) fällt dieses Vorzeichen allerdings heraus. Rutherfords 1911 publizierte Analyse [27] der Experimente von Geiger und Marsden [9], bei denen positiv geladene α-Teilchen an Metallfolien gestreut wurden, hat eine wichtige Bedeutung für die Entwicklung des Atommodells gehabt.

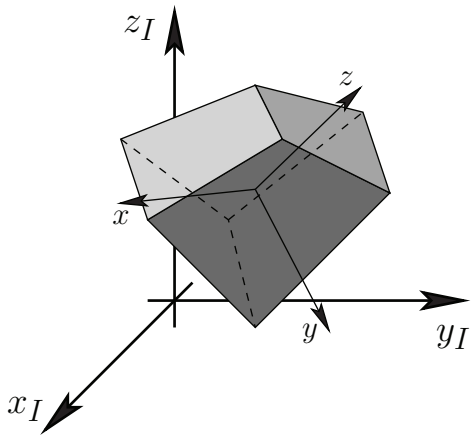


Abbildung 4.12: *Starrer Körper mit körperfestem Koordinatensystem.*

4.3 Starrer Körper

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten, die einen festen Abstand voneinander haben. Man nimmt dabei an, dass keine Verformungen möglich sind. Dies ist natürlich um eine idealisierende Annahme, die aber eine gute Näherung für viele reale Situationen darstellt. Da Leonhard Euler wichtige Beitrage zur Theorie des starren Körpers geleistet hat [7], wird sein Name in diesem Kapitel mehrfach auftauchen.

Zur Beschreibung starrer Körper ist es günstig, neben einem Inertialsystem mit Koordinaten x_I, z_I, z_I auch wie in Abb. 4.12 ein körperfestes Bezugssystem mit Koordinaten x, y, z einzuführen. Die starre Verbindung der Massenpunkte kann dann in den körperfesten Koordinaten durch die Zwangsbedingungen

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i\,, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{4.91}$$

ausgedrückt werden. Die einzigen Freiheitsgrade eines starren Körpers sind also durch die Lage des körperfesten Bezugssystems in dem Inertialsystem gegeben. Dies sind:

(i) *Translationen*, bei denen sich alle Massenpunkte im Inertialsystem um den gleichen Betrag ändern:

$$\vec{r}_{i,I} \to \vec{r}_{i,I} + \Delta\vec{r}\,. \tag{4.92}$$

(ii) *Drehungen* um einen beliebig wählbaren körperfesten Koordinatenursprung O.

Translationen werden durch drei Parameter und Drehungen ebenfalls durch drei Parameter (z.B. die Richtung der Drehachse sowie den Drehwinkel, siehe auch Unterkapitel 4.1.1) beschrieben. Ein starrer Körper besitzt somit *sechs Freiheitsgrade*. Insbesondere läßt sich jede Bewegung eines starren Körpers aus einer Translation und einer

Drehung um den körperfesten Koordinatenursprung O zusammensetzen. Diese Überlegungen werden auch als „Euler-Theorem“ bezeichnet.

4.3.1 Kinetische Energie und Tragheitstensor

Wir können nun Ergebnisse verwenden, die wir bereits in Unterkapitel 3.3 für ein rotierendes Bezugssystem erhalten haben. Die im Inertialsystem beobachtete Geschwindigkeit $\vec{v}_I$ eines köperfesten Punktes erhalten wir durch Addition der Translationsgeschwindigkeit und der durch die Rotation verursachten Geschwindigkeit (3.98):

$$\vec{v}_I = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \tag{4.93}$$

Hierbei ist $\vec{v}_O$ die Geschwindigkeit des körperfesten Koordinatenursprungs O im Inertialsystem, $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sowie $\vec{r}$ der Ortsvektor.

Die kinetische Energie des starren Körpers wird damit

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, \vec{v}_{i,I}^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, \left(\vec{v}_O^{\,2} + 2\,\vec{v}_O \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\, \vec{v}_O^{\,2} + (\vec{v}_O \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2\ , \end{aligned} \tag{4.94}$$

wobei wir die Masse des starren Körpers mit

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{4.95}$$

bezeichnet haben. Der erste Term in (4.94) ist die kinetische Energie der Translation

$$T_{\text{trans.}} = \frac{m}{2}\, \vec{v}_O^{\,2}\,, \tag{4.96}$$

während der letzte Term die kinetische Energie der Rotation darstellt:

$$T_{\text{rot.}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2\ . \tag{4.97}$$

Der mittlere Term involviert beide Freiheitsgrade. Durch geeignete Wahl des körperfesten Koordinatenursprungs O kann er in den folgenden Fällen auf Null gesetzt werden:

(i) Wenn der starre Körper nicht festgehalten wird, bietet es sich an, den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt zu legen. Mit dieser Wahl gilt dann in dem körperfesten Koordinatensystem

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_i = \vec{0}\,. \tag{4.98}$$

Damit gilt $T = T_{\text{trans.}} + T_{\text{rot.}}$.

(ii) Wird der starre Körper in einem Punkt festgehalten, so ist es zweckmäßig, den Koordinatenursprung in diesen Punkt zu legen. Damit wird $\vec{v}_O = \vec{0}$, so dass die ersten beiden Terme in (4.94) verschwinden und $T = T_{\text{rot.}}$ gilt.

Mit Hilfe der bereits in Unterkapitel 3.3 erwähnten Identität $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ kann man die Rotationsenergie (4.97) wie folgt umschreiben:

$$T_{\text{rot.}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\vec{\omega}^2\,\vec{r}_i^{\,2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2\right) . \tag{4.99}$$

Führt man nun den *Trägheitstensor*

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{r}_i^{\,2}\,\mathbb{1} - \vec{r}_i\,\vec{r}_i^{\,\dagger}\right) \tag{4.100}$$

ein, so kann man (4.99) kompakt als

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega} \cdot I\,\vec{\omega} \tag{4.101}$$

schreiben. In (4.100) bezeichnet $\vec{a}^{\,\dagger}$ den zu $\vec{a}$ gehörigen Zeilenvektor, so dass $\vec{a}^{\,\dagger}\,\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ist.

Ein starrer Körper besteht typischer Weise aus sehr vielen Massenpunkten (ein Kubikzentimeter Wasser enthält z.B. insgesamt ziemlich genau 10^{23} Wasserstoff- und Sauerstoff-Atome). Man nimmt deswegen für gewöhnlich den Limes $N \to \infty$, in dem (4.100) in

$$I = \int\limits_V \mathrm{d}^3 r\,\rho(\vec{r})\,\left(\vec{r}^{\,2}\,\mathbb{1} - \vec{r}\,\vec{r}^{\,\dagger}\right) \tag{4.102}$$

übergeht. Hierbei bezeichnet V das Volumen des Körpers und und $\rho(\vec{r})$ seine Massendichte.

Wir wollen den Trägheitstensor noch in Komponentenschreibweise darstellen. Dazu bezeichnen wir die Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$ in dem körperfesten Koordinatensystem mit x_α, so dass $\alpha = 1$ die x-Komponente, $\alpha = 2$ die y-Komponente und $\alpha = 3$ die z-Komponente sind. Wir verwenden ferner die Einsteinsche Summenkonvention für griechische Indizes, d.h. über wiederholte griechische Indizes wird summiert. Damit lautet (4.102) nun

$$I_{\alpha,\beta} = \int\limits_V \mathrm{d}^3 r\,\rho(\vec{r})\,\left(x_\gamma\,x_\gamma\,\delta_{\alpha,\beta} - x_\alpha\,x_\beta\right) . \tag{4.103}$$

In dieser Darstellung ist der Trägheitstensor ein Objekt mit zwei Indizes, von denen sich der erste wie ein Vektor und der zweite wie ein Element des Dualraums

transformiert. Solche Objekte werden auch als „Tensoren“ bezichnet. In der Index-Schreibweise lautet die Rotationsenergie (4.101)

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2}\,\omega_\alpha\, I_{\alpha,\beta}\,\omega_\beta\,. \tag{4.104}$$

Man beachte, dass die Komponenten ω_α hier in dem *gleichen*, d.h. körperfesten Koordinatensystemen wie die Koordinaten x_α zu wählen sind.

Schließlich kann der Trägheitstensor (4.102) auch als Matrix geschrieben werden, deren Einträge durch (4.103) gegeben sind:

$$I = \int\limits_V \mathrm{d}^3 r\,\rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -x\,y & -x\,z \\ -y\,x & x^2+z^2 & -y\,z \\ -z\,x & -z\,y & x^2+y^2 \end{pmatrix}\,. \tag{4.105}$$

Der Trägheitstensor ist *symmetrisch*:

$$I^\dagger = I\,, \qquad \text{bzw.} \qquad I_{\beta,\alpha} = I_{\alpha,\beta}\,. \tag{4.106}$$

Er kann daher durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden. Somit existiert eine orthogonale Basis von Eigenvektoren $\vec{h}_i$ mit Eigenwerten I_i:

$$I\,\vec{h}_i = I_i\,\vec{h}_i\,. \tag{4.107}$$

Die $\vec{h}_i$ heißen *Hauptträgheitsachsen*, die I_i ($= I_{i,i}$ in der Diagonalbasis) heißen *Hauptträgheitsmomente*. In der Diagonalbasis nimmt die Rotationsenergie (4.104) die Form $T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 I_i\,\omega_i^2$ an.

Besitzt ein starrer Körper eine Symmetrieachse, so muß diese durch den Schwerpunkt gehen. Wählen wir nun den Schwerpunkt als körperfesten Koordinatenursprung O, so kann man die Hauptträgheitsachsen direkt angeben: Eine Hauptträgheitsachse stimmt mit der Symmetrieachse überein; die beiden anderen liegen in der hierzu senkrechten Ebene, können aber ansonsten (unter Berücksichtigung der Orthogonalität) beliebig gewählt werden[9].

Man unterscheidet folgende Fälle von starren Körpern:

(i) Einen eindimensionalen starren Körper bezeichnet man als *Rotator*. Wählt man die z-Achse so, dass die gesamte Masse auf ihr liegt, so gilt $I_1 = I_2$, $I_3 = 0$.

(ii) Ein starrer Körper, für den zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind, heißt *symmetrisch*.

(iii) Sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich, so nennt man den starren Körper *Kugelkreisel*. Man beachte, dass für einen „Kugelkreisel“ lediglich die Gleichheit

[9] Wie man z.B. an (4.103) sieht, genügt tatsächlich eine Spiegelsymmetrie $x_\alpha \to -x_\alpha$ entlang einer Ebene, um sicherzustellen dass die Außerdiagonalelemente für dieses α verschwinden: $I_{\alpha,\beta} = 0 = I_{\beta,\alpha}$ für $\beta \neq \alpha$.

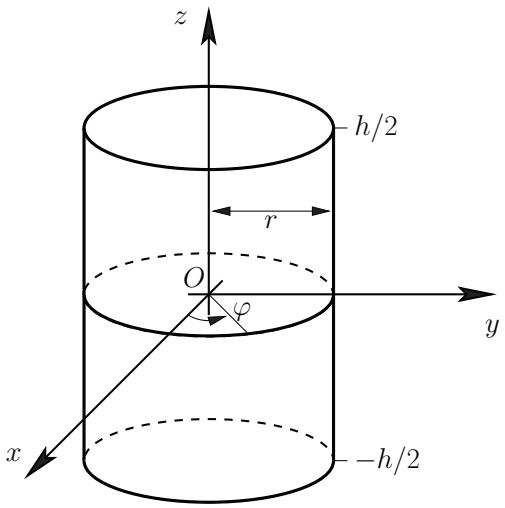


Abbildung 4.13: *Kreiszylinder mit Radius r und Höhe h.*

dreier Momente gefordert wird, was keinen eindeutigen Rückschluß auf seine Oberfläche erlaubt. Kugelkreisel sind deswegen nicht unbedingt Kugeln.

(iv) Ein starrer Körper, für den alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden sind, heißt *unsymmetrisch*.

4.3.2 Kreiszylinder

Wir wollen als Beispiel einen Kreiszylinder mit Radius r, Höhe h und Gesamtmasse M betrachten. Wir wählen den Ursprung O des körperfesten Koordinatensystems wie in Abb. 4.13 auf der Symmetrieachse in der Mitte des Zylinders (für die im folgenden betrachteten Massendichten $\rho(\vec{r})$ fällt O mit dem Schwerpunkt des Zylinders zusammen). Ferner ist die Verwendung von Zylinderkoordinaten (r', φ, z) zur Berechnung der Integrale zweckmäßig. Wir betrachten nun verschiedene Massenverteilungen, bei denen die gewählten Koordinatenachsen jeweils Hauptachsen darstellen. Der Trägheitstensor ist somit jeweils diagonal:

(i) Einen Rotator mit

$$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{h}\,\delta(x)\,\delta(y) \qquad \text{für } |z| \le h/2\,, \tag{4.108}$$

d.h. die gesamte Masse M ist homogen auf eine Linie entlang der Zylinderachse verteilt. Die ersten beiden Hauptträgheitsmomente lauten

$$I_{1,1} = I_{2,2} = \frac{M}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, z^2 = \frac{2\,M}{3\,h} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{M}{12}\,h^2\,. \tag{4.109}$$

Für das dritte Hauptträgheitsmoment gilt

$$I_{3,3} = M \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \left(x^2 + y^2\right) \delta(x)\, \delta(y) = 0\,. \tag{4.110}$$

Dieses Trägheitsmoment verschwindet somit – wie erwartet.

(ii) Eine homogene Massenverteilung auf der Zylinder*oberfläche*:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{2\,\pi\, r\, h}\, \delta(r' - r) \qquad \text{für } |z| \leq h/2\,, \tag{4.111}$$

Die ersten beiden Hauptträgheitsmomente lauten

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{M}{2\,\pi\, r\, h} \int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi\, r \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, \left(r^2\, \sin^2\varphi + z^2\right) = \\ I_{2,2} &= \frac{M}{2\,\pi\, r\, h} \int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi\, r \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, \left(r^2\, \cos^2\varphi + z^2\right) \\ &= \frac{M}{2\,\pi\, h} \left(\pi\, h\, r^2 + 2\,\pi\, \frac{h^3}{12}\right) = \frac{M}{2}\, r^2 + \frac{M}{12}\, h^2\,. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Für das dritte Hauptträgheitsmoment gilt

$$I_{3,3} = \frac{M}{2\,\pi\, r\, h} \int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi\, r \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, r^2 = M\, r^2\,. \tag{4.113}$$

Für $h = \sqrt{6}\, r$ gilt $I_{3,3} = I_{1,1} = I_{2,2}$; ein hohler Kreiszylinder mit dieser Höhe ist also ein Kugelkreisel, andernfalls ist der Zylinder lediglich symmetrisch.

(iii) Eine homogene Massenverteilung über das Zylinder*volumen*:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{\pi\, r^2\, h} \tag{4.114}$$

im Inneren des Zylinders. Die ersten beiden Hauptträgheitsmomente lauten nun

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{M}{\pi\, r^2\, h} \int\limits_0^{r} \mathrm{d}r'\, r' \int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, \left(r'^2\, \sin^2\varphi + z^2\right) = \\ I_{2,2} &= \frac{M}{\pi\, r^2\, h} \int\limits_0^{r} \mathrm{d}r'\, r' \int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\, \left(r'^2\, \cos^2\varphi + z^2\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{r^2\,h}\int\limits_0^r \mathrm{d}r'\,r' \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\,\left(r'^2+2\,z^2\right) = \frac{M}{r^2\,h}\int\limits_0^r \mathrm{d}r'\,r'\left(h\,r'^2+\frac{h^3}{6}\right)$$

$$= \frac{M}{r^2\,h}\left(h\,\frac{r^4}{4}+\frac{h^3\,r^2}{12}\right) = \frac{M}{4}\,r^2+\frac{M}{12}\,h^2\,. \tag{4.115}$$

Das dritte Hauptträgheitsmoment ergibt sich zu

$$I_{3,3} = \frac{M}{\pi\,r^2\,h}\int\limits_0^r \mathrm{d}r'\,r' \int\limits_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z\,r'^2 = \frac{2\,M}{r^2}\int\limits_0^r \mathrm{d}r'\,r'^3 = \frac{M}{2}\,r^2\,. \tag{4.116}$$

In diesem Fall gilt $I_{3,3} = I_{1,1} = I_{2,2}$ für $h = \sqrt{3}\,r$; ein massiver Kreiszylinder mit dieser Höhe ist also ein Kugelkreisel, andernfalls ist der Zylinder lediglich symmetrisch.

Mit diesen Überlegungen kehren wir noch einmal zu dem Zylinder auf der schiefen Ebene aus Beispiel 2.1 zurück. In unserer bisherigen Diskussion hatten wir uns auf die kinetische Energie der Translation beschränkt und den Rotationsbeitrag

$$T_{\mathrm{rot.}} = \frac{1}{2}\,I_{3,3}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,I_{3,3}\,\dot{\varphi}^2 \tag{4.117}$$

vernachlässigt (zur Erinnerung: die Rotationsachse $\vec{\omega}$ fällt mit der z-Achse zusammen). Die Lagrangefunktion (3.21) muß also für einen Zylinder mit einer allgemeinen Massenverteilung wie folgt ergänzt werden:

$$L(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(M+\frac{I_{3,3}}{r^2}\right)(r\,\dot{\varphi})^2 - M\,\tilde{g}\,r\,\varphi\,\sin\alpha\,, \tag{4.118}$$

wobei M und $\tilde{g}$ die physikalische Gesamtmasse bzw. Erdbeschleunigung sind.

Identifizieren wir $m = M + I_{3,3}/r^2$ und $g = \tilde{g}/\left(1+I_{3,3}/(M\,r^2)\right)$, so können wir (4.118) in der Form (3.21) schreiben. Da die Masse m aus der Bewegungsgleichung herausfällt (siehe (2.19)), spielt ausschließlich die effektive Reduktion der Erbeschleunigung g eine Rolle. Rotation und Translation sind bei dem Zylinder durch die schiefe Ebene gekoppelt. Somit muß eine Beschleunigung tatsächlich sowohl zu einer Erhöhung der Translationsenergie als auch der Rotationsenergie führen, d.h. die potentielle Energie fließt auch in die Rotationsfreiheitsgrade. Eine effektive Reduktion der Erbeschleunigung für $I_{3,3} > 0$ ist somit plausibel. Nebenbei sei erwähnt, dass im Fall des Rotators, d.h. wenn die Masse auf der Zylinderachse konzentriert ist, $I_{3,3} = 0$ ist, so dass die Rotationsfreiheitsgrade nicht zur Energiebilanz beitragen.

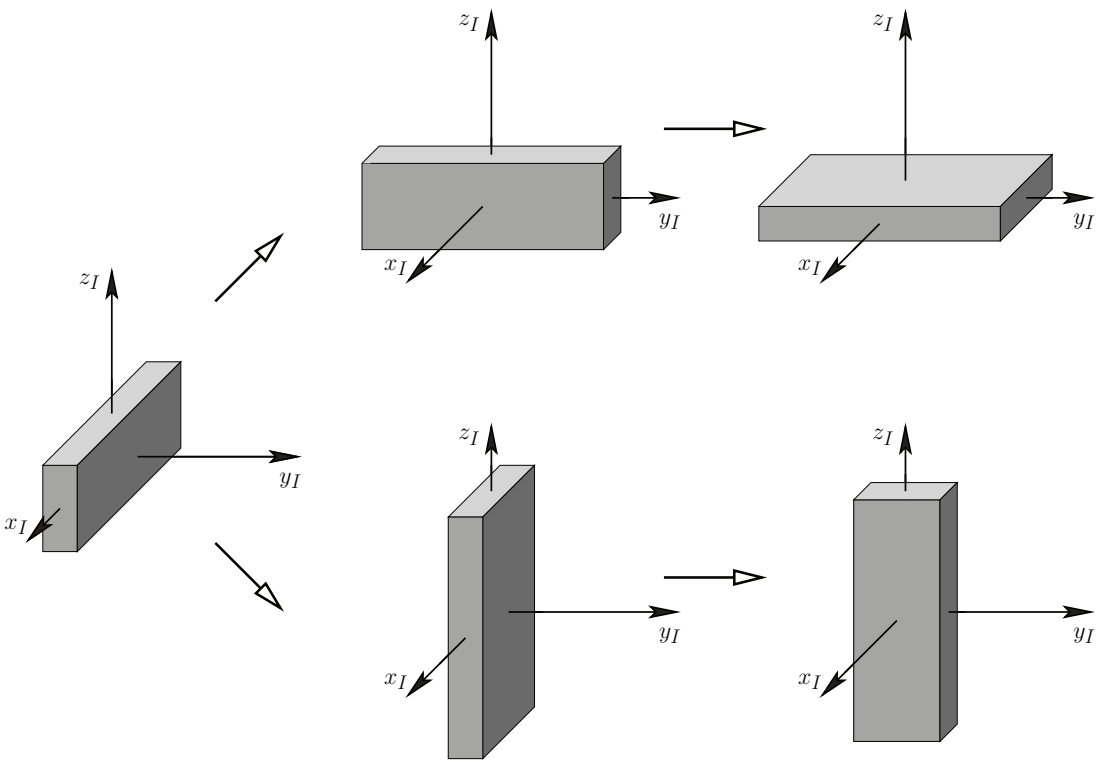


Abbildung 4.14: *Obere Zeile: Ein Quader wird zunächst um $90°$ um die z_I-Achse und anschließend um $90°$ um die y_I-Achse gedreht. Untere Zeile: Der Quader wird zuerst um $90°$ um die y_I-Achse und erst danach um $90°$ um die z_I-Achse gedreht. Man beachte die unterschiedlichen Ergebnisse.*

4.3.3 Euler-Winkel

Wir bereits erwähnt, kann eine beliebige Drehung als Produkt dreier elementarer Drehungen dargestellt werden. Wir wollen diese nun explizit für den Übergang vom Inertialsystem auf das körperfeste Koordinatensystem angeben. Zunächst sei jedoch betont, dass die Reihenfolge der Drehungen keinesfalls vertauscht werden darf. Dies wird in Abb. 4.14 anhand eines Quaders illustriert, der zunächst flach in der x_I-z_I-Ebene liegt. Wird dieser Quader zunächst um $90°$ um die z_I-Achse und anschließend um $90°$ um die y_I-Achse gedreht, so liegt er schließlich flach in der x_I-y_I-Ebene (obere Zeile von Abb. 4.14). Vertauscht man die Reihenfolge der beiden Drehungen, so liegt der Quader am Ende in der y_I-z_I-Ebene (untere Zeile von Abb. 4.14). Das Ergebnis hängt also wesentlich von der Reihenfolge der Operationen ab.

Der Übergang vom Inertialsystem in das körperfeste Koordinatensystem erfolgt mit den in Abb. 4.15 skizzierten Drehungen um die drei *Eulerschen Winkel* φ, ϑ und Ψ, die in der folgenden Reihenfolge auszuführen sind:

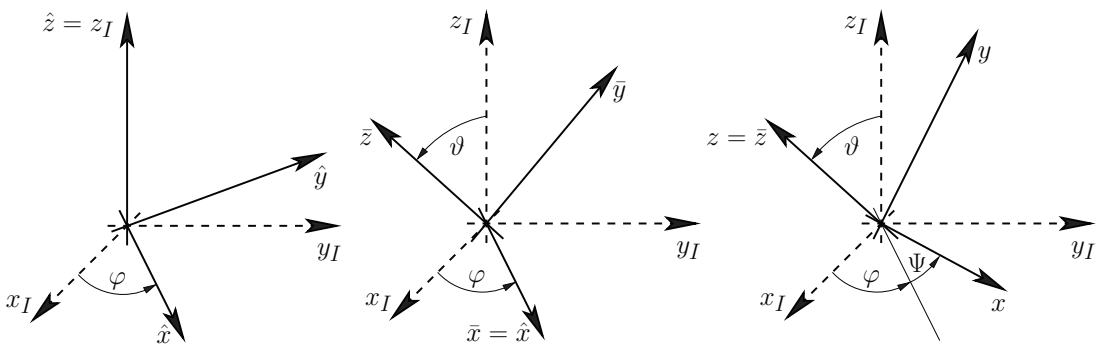


Abbildung 4.15: *Drehung der Koordinaten x_I, y_I, z_I des Inertialsystems auf das körperfeste Koordinatensystem x, y, z. Zunächst erfolgt eine Drehung um die z_I-Achse um den Winkel φ (links). Anschließend wird die z-Achse um den Winkel ϑ um die neu entstandene $\hat{x}$-Achse gekippt (Mitte). Schließlich erfolgt eine Drehung um die neu entstandene z-Achse um den Winkel Ψ (rechts).*

(i) *Drehung um den Winkel φ um die z_I-Achse.* Es entsteht das neue Koordinatensystem $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ mit $\hat{z} = z_I$.

(ii) *Drehung um den Winkel ϑ um die neue $\hat{x}$-Achse.* Es entsteht das neue Koordinatensystem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ mit $\bar{x} = \hat{x}$ und $z = \bar{z}$.

(iii) *Drehung um den Winkel Ψ um die z-Achse.* Nun entsteht das körperfeste Koordinatensystem (x, y, z).

Die entsprechenden Drehmatrizen lauten:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$
$$D_\Psi = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.119}$$

Für die spätere Verwendung berechnen wir das Produkt

$$D_\Psi\, D_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi\,\cos\vartheta & \sin\Psi\,\sin\vartheta \\ -\sin\Psi & \cos\Psi\,\cos\vartheta & \cos\Psi\,\sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{4.120}$$

Für ein gegebenes Inertialsystem x_I, y_I, z_I und ein körperfestes Koordinatensystem x, y, z können die Eulerschen Winkel φ, ϑ, Ψ leicht angegeben werden. Dazu bringt man die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme zunächst mit Hilfe

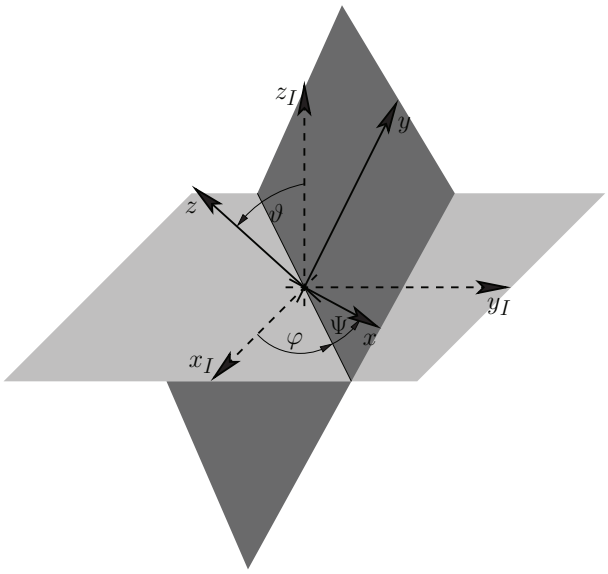


Abbildung 4.16: *Charakterisierung der Lage des körperfesten Koordinatensystems zu dem Inertialsystem mit Hilfe der drei Eulerschen Winkel φ, ϑ, Ψ.*

einer Translation zur Deckung. Nun betrachten wir Abb. 4.16, die die Operationen aus Abb. 4.15 zusammenfaßt. Der Winkel ϑ kann direkt als Kippwinkel der z-Achse relativ zur z_I-Achse abgelesen werden. Zur Bestimmung der Winkel φ und Ψ betrachten wir die Schnittlinie der x_I-y_I-Ebene des Inertialsystems mit der x-y-Ebene des körperfesten Koordinatensystems (auch „Knotenlinie“ genannt). Der Winkel φ kann als Winkel zwischen der x_I-Achse und dieser Schnittlinie abgelesen werden; der Winkel zwischen der Schnittlinie und der x-Achse ist der Winkel Ψ. Die Wertebereiche für die Winkel sind

$$0 \leq \varphi \leq 2\,\pi\,, \qquad 0 \leq \Psi \leq 2\,\pi\,, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi\,. \tag{4.121}$$

Diese Betrachtungen zeigen auch, dass jede beliebige Drehung des körperfesten Koordinatensystems zu dem Inertialsystem eindeutig durch die drei Winkel φ, ϑ, Ψ beschrieben wird.

Typischer Weise ist es günstig, die Achsen x, y, z des körperfesten Koordinatensystems so zu wählen, dass sie mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Besitzt der Körper eine Symmetrieachse, so wählen wir diese als z-Achse. Wie in Abb. 4.17 skizziert, beschreiben die Eulerschen Winkel φ und ϑ dann die Stellung der Symmetrieachse im Inertialsystem; der Eulersche Winkel Ψ gibt die Drehung des Körpers um die Symmetrieachse an. Der Winkel φ wird dementsprechend auch *Präzessionswinkel*, ϑ *Nutationswinkel* und Ψ *Eigenrotationswinkel* genannt.

Wir wollen jetzt die *körperfesten* Komponenten ω_α der Winkelgeschwindigkeit

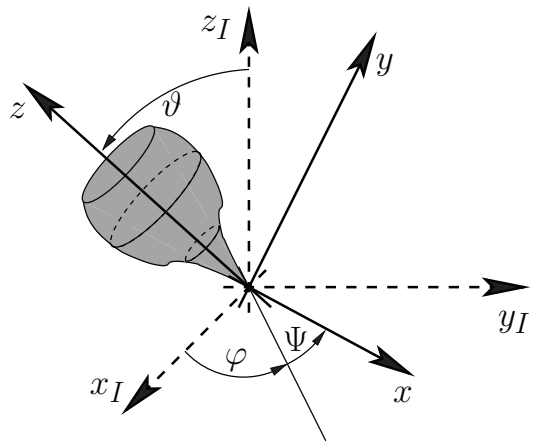


Abbildung 4.17: *Die Winkel φ und ϑ beschreiben die Stellung der Symmetrieachse eines starren Körpers, der Winkel Ψ die Drehung des Körpers um seine Symmetrieachse.*

durch die Eulerschen Winkel ausdrücken. Der Vektor $\vec{\omega}$ setzt sich wie folgt aus den drei Eulerschen Winkelgeschwindigkeiten zusammen:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\vartheta + \vec{\omega}_\Psi \,. \tag{4.122}$$

Man beachte, dass die drei Beiträge im allgemeinen nicht orthogonal sind.

Wir transformieren nun die drei Beiträge in (4.122) in das körperfeste Koordinatensystem, wobei wir in dem für den jeweiligen Winkel geeigneten Koordinatensystem beginnen. $\vec{\omega}_\varphi$ besitzt sowohl im (x_I, y_I, z_I)- als auch im $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$-Koordinatensystem die Darstellung $\vec{\omega}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$, $\vec{\omega}_\vartheta$ hat im Koordinatensystem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ die Form $\vec{\omega}_\vartheta = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{\omega}_\Psi$ besitzt in dem Koordinatensystem (x, y, z) die Form $\vec{\omega}_\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix}$. Die ersten beiden Vektoren sind noch in das körperfeste Koordinatensystem zu transformieren. Damit finden wir in dem *körperfesten* Koordinatensystem (x, y, z):

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = D_\Psi \, D_\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + D_\Psi \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\Psi \, \sin\vartheta \, \dot{\varphi} + \cos\Psi \, \dot{\vartheta} \\ \cos\Psi \, \sin\vartheta \, \dot{\varphi} - \sin\Psi \, \dot{\vartheta} \\ \cos\vartheta \, \dot{\varphi} + \dot{\Psi} \end{pmatrix} . \tag{4.123}$$

4.3.4 Lagrangegleichungen des starren Körpers

Mit den Vorarbeiten aus den Unterkapiteln 4.3.1 und 4.3.3 können die Lagrangefunktion und damit die Bewegungsgleichungen leicht aufgestellt werden.

Die Rotationsenergie erhält man, indem man (4.123) in (4.104) einsetzt und beachtet, dass in dem Hauptachsensystem nur Diagonalelemente des Trägheitstensors beitragen:

$$\begin{aligned} T_{\text{rot.}} &= \frac{I_1}{2}\left(\sin\Psi\,\sin\vartheta\,\dot\varphi+\cos\Psi\,\dot\vartheta\right)^2+\frac{I_2}{2}\left(\cos\Psi\,\sin\vartheta\,\dot\varphi-\sin\Psi\,\dot\vartheta\right)^2 \\ &\quad +\frac{I_3}{2}\left(\cos\vartheta\,\dot\varphi+\dot\Psi\right)^2 . \end{aligned} \tag{4.124}$$

Im *symmetrischen* Fall $I_2 = I_1$ vereinfacht sich dies zu

$$T_{\text{rot.}} = \frac{I_1}{2}\left(\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2+\dot\vartheta^2\right)+\frac{I_3}{2}\left(\cos^2\vartheta\,\dot\varphi^2+2\,\cos\vartheta\,\dot\varphi\,\dot\Psi+\dot\Psi^2\right) . \tag{4.125}$$

Beispiel schwerer Kreisel: Als Beispiel betrachten wir den symmetrischen Kreisel im homogenen Schwerefeld, bei dem ein vom Schwerpunkt verschiedener Punkt auf der Symmetrieachse festgehalten wird. Ein solcher Kreisel wird „schwerer Kreisel“ genannt. Es ist zweckmäßig, den Koordinatenursprung in den Punkt zu legen, der festgehalten wird – vgl. Abb. 4.17. Nach den Bemerkungen aus Unterkapitel 4.3.1 gilt in diesem Koordinatensystem $T = T_{\text{rot.}}$. Der Trägheitstensor ist nun natürlich bezüglich des Koordinatenursprungs auszudrücken, der *nicht* mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Aufgrund der Symmetrie bezüglich der Symmetrieachse ist der Trägheitstensor auch in diesem Koordinatensystem diagonal, so daß wir das Ergebnis (4.125) für die kinetische Energie verwenden können.

Bezeichnen wir die Masse des starren Körpers mit m und den Abstand des Schwerpunktes von dem anderen Punkt auf der Symmetrieachse, der festgehalten wird mit ℓ, so lautet das Potential

$$V = m\,g\,\ell\,\cos\vartheta\,. \tag{4.126}$$

Insgesamt erhalten wir damit die Lagrangefunktion

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2+\dot\vartheta^2\right)+\frac{I_3}{2}\left(\cos^2\vartheta\,\dot\varphi^2+2\,\cos\vartheta\,\dot\varphi\,\dot\Psi+\dot\Psi^2\right)-m\,g\,\ell\,\cos\vartheta\,. \tag{4.127}$$

Inspektion vom (4.127) zeigt, dass die Koordinaten φ und Ψ zyklisch sind. Die kanonisch konjugierten Impulse

$$\begin{aligned} p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} &= I_1\,\sin^2\vartheta\,\dot\varphi+I_3\left(\cos^2\vartheta\,\dot\varphi+\cos\vartheta\,\dot\Psi\right) \\ &= I_1\,\sin^2\vartheta\,\dot\varphi+I_3\left(\cos\vartheta\,\dot\varphi+\dot\Psi\right)\,\cos\vartheta \\ p_\Psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\Psi} &= I_3\left(\cos\vartheta\,\dot\varphi+\dot\Psi\right) \end{aligned} \tag{4.128}$$

sind somit Erhaltungsgrößen. Wir können nun die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\Psi}$ durch die Erhaltungsgrößen p_φ und p_Ψ sowie den Winkel ϑ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - \cos\vartheta\, p_\Psi}{I_1\, \sin^2\vartheta} \\ \dot{\Psi} &= \frac{p_\Psi}{I_3} - \cos\vartheta\, \dot{\varphi} = \frac{p_\Psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - \cos\vartheta\, p_\Psi}{I_1\, \sin^2\vartheta}\, \cos\vartheta\,. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Eine weitere Erhaltungsgröße ist die Energie

$$E = \frac{I_1}{2}\, \left(\sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\, \left(\cos^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2 + 2\, \cos\vartheta\, \dot{\varphi}\, \dot{\Psi} + \dot{\Psi}^2\right) + m\, g\, \ell\, \cos\vartheta\,. \tag{4.130}$$

Die Energie kann mit Hilfe von (4.128) und (4.129) wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1}{2}\, \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\, p_\varphi\, \dot{\varphi} + \frac{1}{2}\, p_\Psi\, \dot{\Psi} + m\, g\, \ell\, \cos\vartheta \\ &= \frac{I_1}{2}\, \dot{\vartheta}^2 + \frac{p_\varphi}{2}\, \frac{p_\varphi - \cos\vartheta\, p_\Psi}{I_1\, \sin^2\vartheta} + \frac{p_\Psi}{2}\, \left(\frac{p_\Psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - \cos\vartheta\, p_\Psi}{I_1\, \sin^2\vartheta}\, \cos\vartheta\right) + m\, g\, \ell\, \cos\vartheta \\ &= \frac{I_1}{2}\, \dot{\vartheta}^2 + \frac{\left(p_\varphi - \cos\vartheta\, p_\Psi\right)^2}{2\, I_1\, \sin^2\vartheta} + \frac{p_\Psi^2}{2\, I_3} + m\, g\, \ell\, \cos\vartheta\,. \end{aligned} \tag{4.131}$$

Da E, p_φ und p_Ψ erhalten sind, kann dieses Ergebnis als Differentialgleichung erster Ordnung für $\vartheta(t)$ aufgefaßt werden. Für eine gegebene Lösung $\vartheta(t)$ führt einmalige Integration von (4.129) auf $\varphi(t)$ und $\Psi(t)$.

Wir formen (4.131) noch ein wenig um. Zunächst multiplizieren wir beide Seiten mit $\sin^2\vartheta$ und beachten $\dot{\vartheta}\, \sin\vartheta = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \cos\vartheta$:

$$\sin^2\vartheta\, E = \frac{I_1}{2}\, \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \cos\vartheta\right)^2 + \frac{\left(p_\varphi - \cos\vartheta\, p_\Psi\right)^2}{2\, I_1} + \frac{p_\Psi^2\, \sin^2\vartheta}{2\, I_3} + m\, g\, \ell\, \cos\vartheta\, \sin^2\vartheta\,. \tag{4.132}$$

Mit der Substitution $u = \cos\vartheta$, d.h. $\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = 1 - u^2$ können wir dies als

$$\left(1 - u^2\right)\, E = \frac{I_1}{2}\, \dot{u}^2 + \frac{\left(p_\varphi - u\, p_\Psi\right)^2}{2\, I_1} + \frac{p_\Psi^2\, \left(1 - u^2\right)}{2\, I_3} + m\, g\, \ell\, u\, \left(1 - u^2\right) \tag{4.133}$$

schreiben. Nach Umsortieren erhält man

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2\, E}{I_1} - \frac{p_\Psi^2}{I_1\, I_3} - \frac{2\, m\, g\, \ell\, u}{I_1}\right)\, \left(1 - u^2\right) - \left(\frac{p_\varphi - u\, p_\Psi}{I_1}\right)^2 =: -2\, V_{\mathsf{eff.}}(u)\,. \tag{4.134}$$

Die rechte Seite ist eine Funktion von u, die wir als effektives Potential definiert haben. Diese Definition erinnert an Unterkapitel 3.1.3, 3.3 und 4.2.3. Allerdings ist die Beziehung von dem effektiven Potential $V_{\mathsf{eff.}}(u)$ zu realen physikalischen Größen wie z.B. dem Potential (4.126) hier indirekter als zuvor.

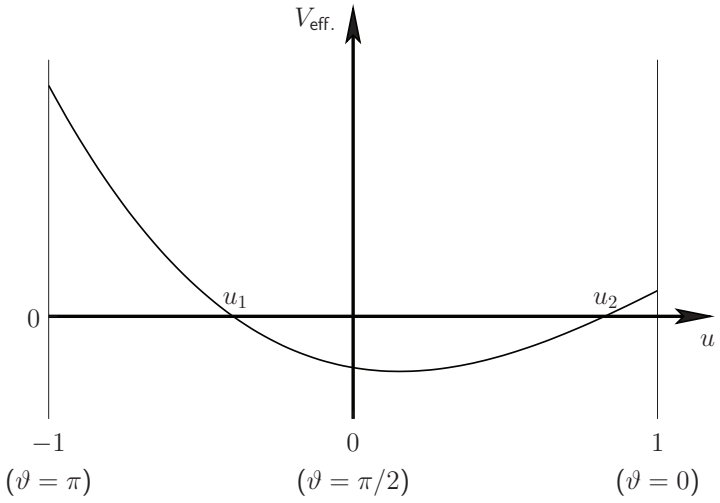


Abbildung 4.18: *Effektives Potential (4.134) für den schweren Kreisel mit $\ell > 0$. Die beiden Nullstellen im Intervall $|u| < 1$ sind u_1 und u_2.*

Die Differentialgleichung (4.134) kann nach Trennung der Variablen integriert werden:

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \mathrm{d}u' \, \frac{1}{\sqrt{-2\, V_{\text{eff.}}(u')}} \,. \tag{4.135}$$

Leider führt dieses Integral nicht auf elementare Funktionen.

Wir beschränken uns hier auf eine qualitative Diskussion der Lösungen im Sinne von Unterkapitel 4.2.3. Dazu schreiben wir (4.134) als

$$E' := \frac{\dot{u}^2}{2} + V_{\text{eff.}}(u) = 0 \,. \tag{4.136}$$

Dies entspricht der Bewegung eines Teilchens mit Koordinate u, „Masse“ $m = 1$ und „Energie“ $E' = 0$ in dem effektiven Potential $V_{\text{eff.}}(u)$. Hier ist zu beachten, dass aufgrund der Definition $u = \cos\vartheta$ mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$ der Wertebereich auf $-1 \leq u \leq 1$ beschränkt ist.

Für große u dominiert der Beitrag $-m\, g\, \ell\, u^3/I_1$ in dem effektiven Potential (4.134). Daher wächst $V_{\text{eff.}}(u) \propto u^3$ für $|u| \to \infty$. Insbesondere ist $V_{\text{eff.}}(u)$ für $\ell > 0$ positiv (negativ) in den eigentlich ausgeschlossen Bereichen $u \ll -1$ ($u \gg 1$).

Bei $u = \pm 1$ verschwindet der erste Summand in (4.134) und das effektive Potential nimmt folgende Werte an:

$$V_{\text{eff.}}(\pm 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\varphi \mp p_\Psi}{I_1} \right)^2 > 0 \,, \tag{4.137}$$

wenn wir den Fall $p_\Psi = \pm p_\varphi$ ausschließen. Nach (4.128) gilt $p_\varphi = p_\Psi$ genau für $\vartheta = 0$ und $p_\varphi = -p_\Psi$ für $\vartheta = \pi$. $V_{\text{eff.}}(\pm 1) = 0$ gilt also nur im Spezialfall eines aufrecht

stehenden Kreisels, den wir in Unterkapitel 4.3.5 gesondert diskutieren wollen. Im allgemeinen werden die Winkel $\vartheta = 0, \pi$, d.h. $u = \pm 1$ im Verlauf der Bewegung nicht angenommen.

Nach den bisherigen Überlegungen hat $V_{\text{eff.}}(u)$ eine Nullstelle für $u > 1$ und zwei oder keine Nullstellen im Intervall $|u| < 1$. Da nur im Bereich $V_{\text{eff.}}(u) \leq 0$ Bewegungen stattfinden können, müssen genau zwei Nullstellen im Intervall $|u| < 1$ liegen. Das effektive Potential sieht also aus wie in Abb. 4.18 skizziert. Die Bewegung verläuft in dem Intervall $u_1 \leq u \leq u_2$, in dem $V_{\text{eff.}} \leq 0$ ist. Bei den Nullstellen u_1, u_2 von $V_{\text{eff.}}(u)$ ändert $\dot{u}$ und damit auch $\dot{\vartheta}$ das Vorzeichen. Entsprechend läuft der Winkel ϑ zwischen den beiden Grenzwerten $\vartheta_2 = \cos^{-1} u_2$ und $\vartheta_1 = \cos^{-1} u_1$ hin und her. Diese periodische Änderung der Neigung der Symmetrieachse wird *Nutation* genannt.

Eine vollständige Charakterisierung der Bewegung der Symmetrieachse erhält man, wenn man den Präzessionswinkel φ mit Hilfe von (4.129) in der Form

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{p_\varphi - u(t)\, p_\Psi}{I_1\ (1 - u(t)^2)} \tag{4.138}$$

darstellt und einmal nach t integriert. Entscheidend ist hier, ob $p_\varphi - u\, p_\Psi$ zwischen u_1 und u_2 einen Vorzeichenwechsel besitzt, oder nicht. Demnach ergeben sich die folgenden vier Bewegungstypen eines schweren Kreisels:

(a) Existiert *kein* Vorzeichenwechsel, so ergibt sich das in Abb. 4.19(a) skizzierte Verhalten der Winkel φ, ϑ, die die Stellung der Symmetrieachse charakterisieren. Insbesondere bewegt sich der Winkel φ an der oberen Grenze ϑ_2 in die gleiche Richtung wie an der unteren Grenze ϑ_1.

(b) Falls das Vorzeichen wechselt, ergibt sich das in Abb. 4.19(b) skizzierte Verhalten der Winkel φ, ϑ. Jetzt bewegt sich der Winkel φ an der oberen Grenze ϑ_2 in die *entgegengesetzte* Richtung wie an der unteren Grenze ϑ_1.

(c) Es ist auch möglich, dass $p_\varphi - u_2\, p_\Psi = 0$ ist. Dann verschwindet bei ϑ_2 nicht nur $\dot{\vartheta}$, sondern auch $\dot{\varphi}$. Es ergeben sich wie in Abb. 4.19(c) skizziert Spitzen in der Kurve $\vartheta(\varphi)$. Diese Spitzen entstehen z.B. dann, wenn die Symmetrieachse am Anfang festgehalten wird, so dass die Anfangsbedingungen $\dot{\vartheta}(0) = 0 = \dot{\varphi}(0)$ (aber $\dot{\Psi}(0) \neq 0$) lauten. Zur genaueren Analyse dieses Falls schreiben wir die Energie (4.131) mit Hilfe von (4.129) in der Form

$$E = \frac{I_1}{2}\ \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\ \sin^2\vartheta\right) + \frac{p_\Psi^2}{2\, I_3} + m\, g\, \ell\ \cos\vartheta\,. \tag{4.139}$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen gilt $E(0) = \frac{p_\Psi^2}{2\, I_3} + m\, g\, \ell\ \cos\vartheta(0)$. Da die übrigen Terme in (4.139) positiv sind und p_Ψ eine Erhaltungsgröße ist, muß

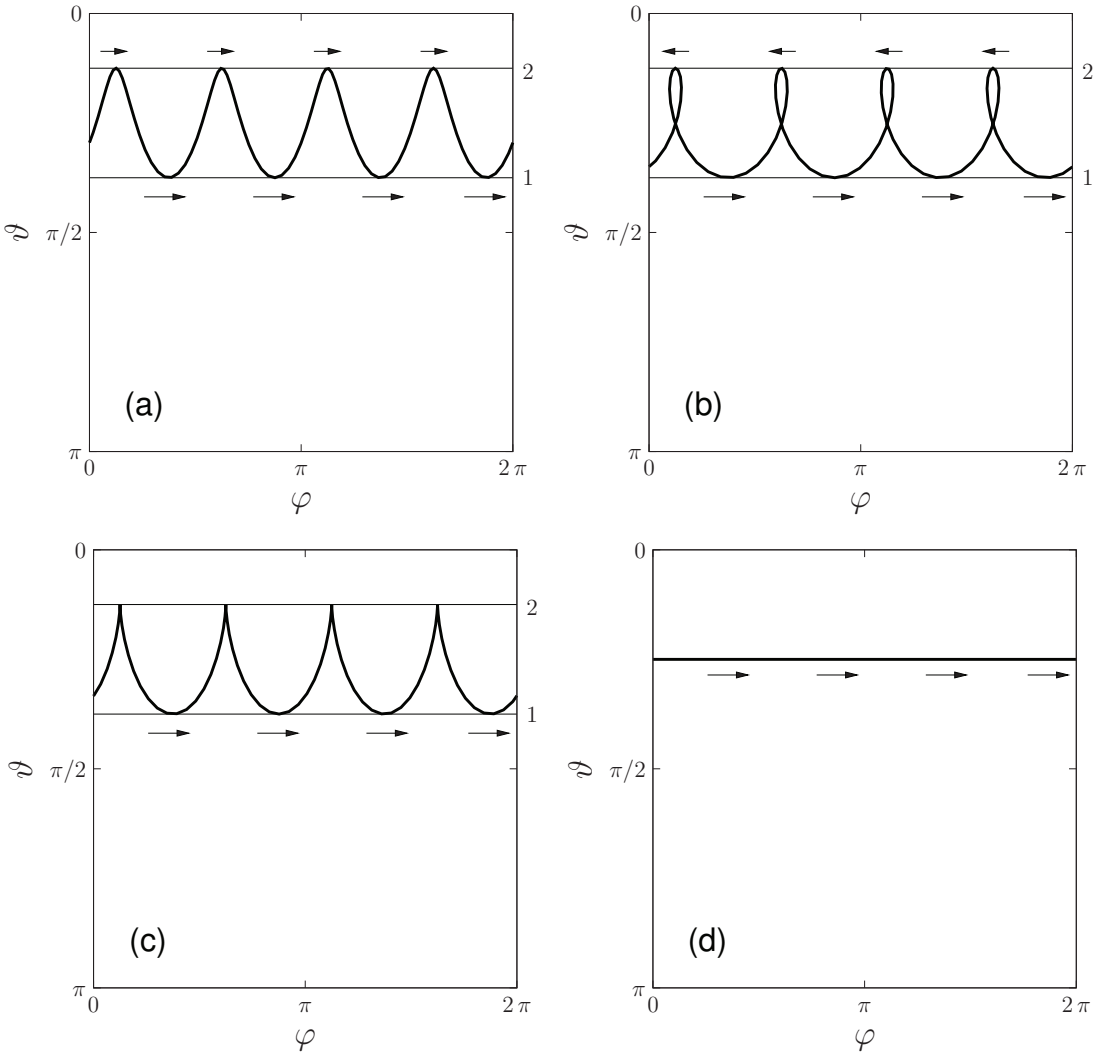


Abbildung 4.19: *Die vier Bewegungstypen der Symmetrieachse eines schweren Kreisels.*

(für $\ell > 0$) $\cos\vartheta(t) \leq \cos\vartheta(0)$ sein. Die Spitze kann daher nur am *oberen* Rand ϑ_2 auftreten (für $\ell < 0$ würde sie ausschließlich am unteren Rand ϑ_2 auftreten).

(d) Durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen kann man auch erreichen, daß die beiden Nullstellen u_1 und u_2 zu einer doppelten Nullstelle zusammenfallen. Dann gilt notwendig $u = u_1 = u_2$ für alle Zeiten, d.h. $\dot\vartheta = 0$ und $\dot\varphi$ ist konstant, siehe (4.138). Somit ergibt sich in diesem Fall das in Abb. 4.19(d) skizzierte Verhalten.

4.3.5 Stabilitätsanalyse eines aufrecht stehenden Kreisels

Wir betrachten nun die speziellen Lösungen

$$\vartheta^{(\mathsf{a})}(t) = 0 \text{ oder } \pi\,, \qquad \varphi^{(\mathsf{a})}(t) = 0\,, \qquad \Psi^{(\mathsf{a})}(t) = \Psi_0 + \dot{\Psi}_0\, t\,. \tag{4.140}$$

Dies sind Lösungen der Differentialgleichungen (4.128) und (4.131) mit $p_\Psi = I_3\,\dot{\Psi}_0 = p_\varphi$, $E = \frac{p_\Psi^2}{2\,I_3} + m\,g\,\ell$ für $\vartheta^{(\mathsf{a})} = 0$ und $p_\Psi = I_3\,\dot{\Psi}_0 = -p_\varphi$, $E = \frac{p_\Psi^2}{2\,I_3} - m\,g\,\ell$ für $\vartheta^{(\mathsf{a})} = \pi$. Genaugenommen ist noch zu überlegen, dass der zweite Summand der Energie in (4.131) nicht nur einen wohldefinierten Grenzwert $\vartheta^{(\mathsf{a})} \to 0$ oder π besitzt, sondern dieser auch verschwindet. Dies wird allerdings im Verlauf der folgenden Rechnung klar werden.

Für $\dot{\Psi} = 0$ genügt im allgemeinen eine kleine Störung, um den Kreisel zum „Umkippen“ zu bewegen. Die Frage ist somit naheliegend, unter welchen Bedingungen die aufrechte Kreiselbewegung stabil ist. Wir betrachten also Lösungen in der Nähe von (4.140):

$$\vartheta(t) = \vartheta^{(\mathsf{a})}(t) + \delta\,\tilde{\vartheta}(t)\,. \tag{4.141}$$

Hierbei ist δ ein kleiner Parameter. Man beachte, dass wir keine Annahmen über die Winkel $\varphi(t)$ und $\Psi(t)$ gemacht haben. Tatsächlich fallen beim aufrecht stehenden Kreisel die Präzessions- und Eigenrotationsachsen zusammen, so dass die Aufteilung der Drehbewegung auf die Winkel φ und Ψ nicht eindeutig ist.

Die Fälle $\vartheta = 0$ oder π können nur für $p_\varphi = \pm p_\Psi$ auftreten, wobei das „$+$“-Zeichen für $\vartheta = 0$ und das „$-$“-Zeichen für $\vartheta = \pi$ zu wählen ist. Wir setzten dies nun in den folgenden Ausdruck ein und entwickeln:

$$p_\varphi - \cos\vartheta\, p_\Psi = \pm\frac{1}{2}\,\delta^2\,\tilde{\vartheta}^2\, p_\Psi + \mathcal{O}(\delta^4)\,. \tag{4.142}$$

Damit ist der zweite Term in (4.131) von der Ordnung δ^2, d.h. der Limes $\delta \to 0$ existiert und verschwindet, wie zuvor behauptet.

Als nächstes verwenden wir die Lagrangefunktion (4.127), um die Lagrangegleichung (3.18) für den Winkel ϑ aufzustellen:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} \\
&= I_1\left(\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + I_3\left(\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + \sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\dot{\Psi}\right) - m\,g\,\ell\,\sin\vartheta \\
&= I_1\left(\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + \sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,p_\Psi - m\,g\,\ell\,\sin\vartheta \qquad (4.143)\\
&= I_1\left(\ddot{\vartheta} - \frac{(p_\varphi - \cos\vartheta\,p_\Psi)^2}{I_1^2\,\sin^3\vartheta}\,\cos\vartheta\right) + \frac{p_\varphi - \cos\vartheta\,p_\Psi}{I_1\,\sin\vartheta}\,p_\Psi - m\,g\,\ell\,\sin\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir zunächst (4.128) und anschließend (4.129) verwendt, um $\dot{\Psi}$ bzw. $\dot{\varphi}$ durch p_Ψ und p_φ auszudrücken.

Wir verwenden nun die Näherung (4.142) und entwickeln die verbleibenden trigonometrischen Funktionen in (4.143) nach δ. Für den Koeffizienten des linearen Terms finden wir:

$$0 = I_1 \left(\ddot{\tilde{\vartheta}} - \frac{\tilde{\vartheta}\, p_\Psi^2}{4\, I_1^2} \right) + \frac{\tilde{\vartheta}\, p_\Psi^2}{2\, I_1} \mp m\, g\, \ell\, \tilde{\vartheta} = I_1\, \ddot{\tilde{\vartheta}} + \left(\frac{p_\Psi^2}{4\, I_1} \mp m\, g\, \ell \right) \tilde{\vartheta}\,, \qquad (4.144)$$

wobei das obere Vorzeichen für $\vartheta^{(\mathsf{a})} = 0$ und das untere für $\vartheta^{(\mathsf{a})} = \pi$ zu wählen ist.

Das Verhalten der Lösungen hängt nun von dem Vorzeichen von

$$k = \frac{p_\Psi^2}{4\, I_1} \mp m\, g\, \ell \qquad (4.145)$$

ab. Für $k > 0$ ist (4.144) eine Schwingungsgleichung, deren Lösungen $\tilde{\vartheta}(t)$ beschränkt sind. Für $k < 0$ sind die Lösungen von (4.144) hingegen Exponentialfunktionen, von denen eine exponentiell anwächst. Für $k < 0$ wächst also im allgemeinen eine kleine Störung $\tilde{\vartheta}(t)$ exponentiell an, die Bewegung ist instabil und der Kreisel kippt um.

$k < 0$ kann auftreten, wenn der Schwerpunkt oberhalb von dem Punkt liegt, der festgehalten wird. Dies ist einerseits der Fall für $\vartheta^{(\mathsf{a})} = 0$ und $\ell > 0$ sowie andererseits für $\vartheta^{(\mathsf{a})} = \pi$ und $\ell < 0$. Für große p_Ψ, d.h. für große $\dot{\Psi}_0$ überwiegt in jedem Fall der Drehimpulsbeitrag in (4.145) und die aufrechte Stellung des Kreisels wird durch die Eigenrotation stabilisiert.

5 Hamiltonsche Mechanik

Bisher haben wir neben der Newtonschen Formulierung in Kapitel 3 die Lagrangesche Formulierung der Mechanik kennengelernt. Wir wollen nun eine weitere Formulierung der Mechanik kennenlernen, die auf William Rowan Hamilton zurückgeht [13]. Der Lagrange-Formulismus beschreibt ein System mit n Freiheitsgraden durch n Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung für die n generalisierten Koordinaten. Im Hamilton-Formalismus werden diese durch $2\,n$ Differentialgleichungen *erster* Ordnung auf dem $2\,n$-dimensionalen Phasenraum ersetzt. Aus rechentechnischer Sicht wesentlich ist die Forminvarianz des Lagrange-Formalismus (siehe Unterkapitel 3.1.5). An dieser Stelle hat der Hamilton-Formalismus keine Vorteile. Er ist jedoch aus konzeptioneller Sicht wichtig – z.B. zeigt er Querverbindungen zur symplektischen Geometrie auf [1]. Auch für den Übergang zur Quantenmechanik ist die Hamiltonische Formulierung unerläßlich.

5.1 Hamiltonsche Gleichungen

Zentral für den Hamilton-Formalismus sind die in (3.165) definierten kanonisch konjugierten Impulse $p_j = \partial\, L/\partial \dot{q}_j$, die wir als zusätzliche Variablen einführen. Damit gilt es, Bewegungsgleichungen für die $2\,n$ Variablen q_j, p_j aufzustellen. Dies geschieht mit Hilfe der Hamiltonfunktion, die wir im Prinzip bereits in (3.190) eingeführt hatten. Wir wollen jedoch einen allgemeineren Zugang wählen.

5.1.1 Legendre-Transformation

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ (dies wird die Lagrangefunktion $L(\ldots, \dot{q}_i, \ldots)$ sein, wobei man die übrigen Variablen festhält). Wir wollen möglichst umkehrbar eindeutig zu einer neuen Funktion $g(u)$ in einer neuen Variablen $u := \partial\, f/\partial x$ übergehen (dies wird die Hamiltonfunktion $H(\ldots, p_i, \ldots)$ sein, wenn wir wieder alle bis auf eine Variable festhalten). Wir betrachten dazu das *totale Differential*

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial\, f}{\partial x}\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

mit

$$u = \frac{\partial\, f}{\partial x}\,. \tag{5.2}$$

Die gesuchte Funktion ist die *Legende-Transformierte*

$$g := u\,x - f\,. \tag{5.3}$$

Das totale Differential der so definierten Funktion g lautet nämlich

$$\mathrm{d}g = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u - \mathrm{d}f = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}u\,. \tag{5.4}$$

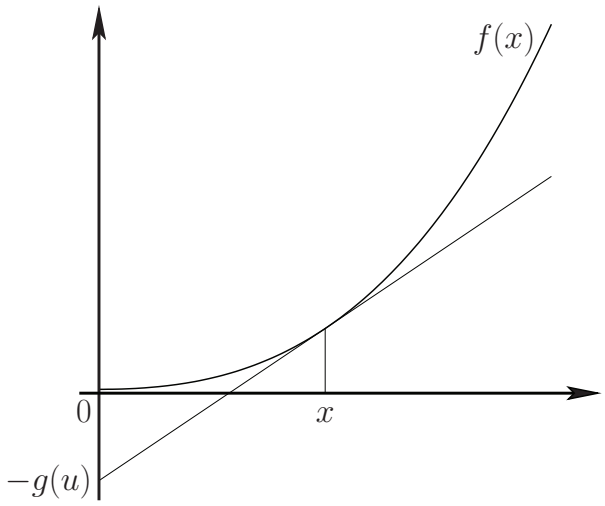


Abbildung 5.1: *Die Legendre-Transformation ordnet einer Funktion $f(x)$ eine Funktion $g(u)$ zu, wobei u die Steigung der Funktion f im Punkt x ist.*

Also hängt g tatsächlich nicht von x ab, sondern ist nur eine Funktion von u:

$$g = g(u)\,. \tag{5.5}$$

Das totale Differential von g kann deswegen auch als

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial\, g}{\partial u}\,\mathrm{d}u \tag{5.6}$$

geschrieben werden. Ein Vergleich von (5.6) mit (5.4) ergibt

$$x = \frac{\partial\, g}{\partial u}\,. \tag{5.7}$$

Eine graphische Interpretation der Legendre-Transformation findet man in Abb. 5.1: Von der Variablen x geht man zur Steigung $u = \partial\, f/\partial x$ der Funktion f in diesem Punkt über. Der Wert der in (5.3) definierten Funktion $g(u)$ ergibt sich dann (bis auf ein Minuszeichen) über den Schnittpunkt der Tangente an die Funktion f im Punkt x mit der Ordinate.

Die Umkehrung der Legendre-Transformation ergibt sich durch nochmalige Anwendung: Von der Variablen u gehen wir mit Hilfe von (5.7) auf die Variable x zurück. Nach (5.3) ist die Legendre-Transformierte der Funktion g nun $x\,u - g = f$, womit wir die Funktion f zurück erhalten. Die Legendre-Transformation ist somit zumindest formal umkehrbar. Die Abbildung $x \mapsto u$ ist genau dann eindeutig, wenn $u(x)$ monoton ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Funktion f *konvex* ist (vgl. Abb. 5.1), d.h. wenn $\partial^2 f/\partial x^2$ keine Nullstelle besitzt.

Der Legendre-Transformation wird manchmal auch mit dem umgekehrten Vorzeichen wie in (5.3) definiert (siehe z.B. [10,17,18]). Dann geht allerdings die schöne Eigenschaft verloren, dass die Umkehrung der Transformation ebenfalls exakt eine Legendre-Transformation ist.

5.1.2 Hamiltonfunktion und Bewegungsgleichungen

Wir wenden nun die Legendre-Transformation (5.3) auf jede der n Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ der Lagrangefunktion $L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$ an. Wir erhalten damit die *Hamiltonfunktion*

$$H(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i - L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)\,. \tag{5.8}$$

Das totale Differential der so definierten Hamiltonfunktion lautet

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum_{i=1}^{n} (p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i + \dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i) - \mathrm{d}L \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i + \dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\mathrm{d}\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i - \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i) - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Definition $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ verwendet, sowie im letzten Schritt die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art (3.18) in der Form $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$.

Das Ergebnis (5.9) zeigt, dass H nicht von $\dot{q}_i$ abhängt, also nur wie gefordert von der Koordinaten q_i, den Impulsen p_i und ggfs. der Zeit t. Damit können wir das totale Differential der Hamiltonfunktion auch wie folgt schreiben:

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.10}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von (5.9) und (5.10) liefert die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{5.11}$$

sowie für die partielle Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\,. \tag{5.12}$$

Wir betonen nochmals ausdrücklich, dass die Hamiltonfunktion als Funktion von q_i, p_i und der Zeit t geschrieben werden muß, d.h. auf der rechten Seite von (5.8) sind die Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ als Funktion der gewünschten Variablen $\dot{q}_i(\{q_i\},\{p_i\},t)$ zu schreiben und somit zu eliminieren.

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) sind (bis auf das Vorzeichen) symmetrisch in den Koordinaten q_i und den Impulsen p_i; die $2\,n$ Variablen q_i und p_i sind im Hamilton-Formalismus völlig gleichberechtigt.

Wir haben die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) mit Hilfe einer Legendre-Transformation aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (3.18) hergeleitet. Tatsächlich sind die beiden Systeme von Gleichungen äquivalent. Um dies zu zeigen, müssen wir die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen herleiten. Zunächst müssen wir die Lagrangefunktion aus einer gegebenen Hamiltonfunktion bestimmen. Nach Unterkapitel 5.1.1 ist dies mit einer Legendre-Transformation zu erreichen:

$$L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, p_i - H(\{q_i\},\{p_i\},t)\,, \tag{5.13}$$

wobei $\dot{q}_i = \partial\, H/\partial p_i$ ist, vgl. (5.11). Das totale Differential der in (5.13) definierten Funktion L lautet

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L &= \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i + p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i) - \mathrm{d}H \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i + p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial\, H}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i - \frac{\partial\, H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i\right) - \frac{\partial\, H}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i + p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i + \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i - \dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i) - \frac{\partial\, H}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i + \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i) - \frac{\partial\, H}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) eingesetzt. Das Ergebnis zeigt, dass L tatsächlich wie gefordert eine Funktion der Koordinaten q_i, Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ sowie der Zeit t ist. Damit können wir das totale Differential von L auch wie folgt schreiben:

$$\mathrm{d}L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\, L}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i + \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\,\mathrm{d}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial\, L}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.15}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von (5.14) und (5.15) führt auf

$$p_i = \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_i}\,, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial\, L}{\partial q_i}\,, \qquad \frac{\partial\, L}{\partial t} = -\frac{\partial\, H}{\partial t}\,. \tag{5.16}$$

Setzen wir die ersten beiden dieser Gleichungen ineinander ein, so finden wir $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$. Dies zeigt, dass die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art (3.18) aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) folgen. Die beiden Sätze von Bewegungsgleichungen sind also vollständig äquivalent!

Die Hamiltonfunktion (5.8) hatten wir bereits im Unterkapitel 3.5.3 eingeführt (siehe (3.190) und beachte $n = 3\,N - k$), allerdings ohne sie als eine Funktion von q_i und p_i aufzufassen. Wir können damit die Überlegungen aus Unterkapitel 3.5.3 zur physikalischen Bedeutung der Hamiltonfunktion übernehmen:

(i) Für nicht explizit zeitabhängige Probleme, d.h. für $\partial\, H/\partial t = 0$ ist H eine Erhaltungsgröße.
Dies sieht man auch schnell mit Hilfe des Hamilton-Formalismus:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,H}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\, H}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial\, H}{\partial p_i}\,\dot{p}_i\right) + \underbrace{\frac{\partial\, H}{\partial t}}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\, H}{\partial q_i}\,\frac{\partial\, H}{\partial p_i} - \frac{\partial\, H}{\partial p_i}\,\frac{\partial\, H}{\partial q_i}\right) = 0\,, \end{aligned} \tag{5.17}$$

wobei wir beim Übergang zur zweiten Zeile die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) verwendet haben.

(ii) Für *konservative Kraftfelder, skleronom-holonome Zwangsbedingungen und Inertialsysteme* gilt nach (3.196), dass $H = T + V = E$ ist, d.h. in diesem Spezialfall ist die Hamiltonfunktion gleich der *Energie*.

Aufgrund der zweiten Bemerkungen kann die Hamiltonfunktion für konservative Kräfte, skleronom-holonome Zwangsbedingungen und *kartesische Koordinaten* eines Inertialsystems sofort als $H = T+V$ angegeben werden, denn dann gilt $T = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\,\vec{v}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\,m_i}\,\vec{p}_i^{\,2}$, siehe (1.26) und (1.4). Im allgemeinen muß man jedoch zuerst die Lagrangefunktion aufstellen, dann die kanonisch konjugierten Impulse p_i bestimmen und schließlich die Hamiltonfunktion mit Hilfe der Legendre-Transformation herleiten.

Beispiel 3.5: Als Beispiel betrachten wir das sphärische Pendel der Länge ℓ mit Masse m aus Abb. 3.5. Die Lagrangefunktion hatten wir bereits berechnet, sie lautet (siehe (3.171))

$$L(\vartheta,\varphi,\dot{\vartheta},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\,\ell^2\,\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + m\,g\,\ell\,\cos\vartheta\,. \tag{5.18}$$

Auch einen der beiden Impulse hatten wir bereits in (3.172) angegeben. Wir benötigen jedoch beide Impulse, so dass wir sie noch einmal berechnen:

$$p_\varphi = \frac{\partial\, L}{\partial\dot{\varphi}} = m\,\ell^2\,\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}\,, \qquad p_\vartheta = \frac{\partial\, L}{\partial\dot{\vartheta}} = m\,\ell^2\,\dot{\vartheta}\,. \tag{5.19}$$

Da wir die Geschwindigkeiten zugunsten der Impulse elimieren müssen, lösen wir (5.19) entsprechend auf:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\,\ell^2\,\sin^2\vartheta}\,, \qquad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m\,\ell^2}\,. \tag{5.20}$$

Wir setzen nun (5.18) und (5.20) in die Hamiltonfunktion (5.8) ein:

$$\begin{aligned} H(\vartheta,\varphi,p_\vartheta,p_\varphi) &= p_\varphi\,\dot{\varphi} + p_\vartheta\,\dot{\vartheta} - L \\ &= \frac{p_\varphi^2}{m\,\ell^2\,\sin^2\vartheta} + \frac{p_\vartheta^2}{m\,\ell^2} - \frac{m\,\ell^2}{2}\,\left(\frac{p_\vartheta^2}{m^2\,\ell^4} + \frac{p_\varphi^2}{m^2\,\ell^4\,\sin^2\vartheta}\right) - m\,g\,\ell\,\cos\vartheta \\ &= \frac{1}{2\,m\,\ell^2}\,\left(p_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,p_\varphi^2\right) - m\,g\,\ell\,\cos\vartheta\,. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Damit ist das erste Ziel erreicht: Wir haben die Hamiltonfunktion in den gesuchten Variablen angegeben.

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) lauten nun

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\,\ell^2\,\sin^2\vartheta}\,, \tag{5.22}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m\,\ell^2}\,, \tag{5.23}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0\,, \tag{5.24}$$

$$\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{p_\varphi^2\,\cos\vartheta}{m^2\,\ell^4\,\sin^3\vartheta} - m\,g\,\ell\,\sin\vartheta\,. \tag{5.25}$$

Die Gleichung (5.24) zeigt, dass p_φ eine Erhaltungsgröße ist. Tatsächlich hatten wir bereits in Unterkapitel 3.5.1 beobachtet, dass die Koordinate φ zyklisch ist und daraus die Erhlaltung von p_φ gefolgert. Aufgrund der Erhaltung von p_φ erhalten wir $\varphi(t)$ durch einmalige Integration von (5.22), nachdem wir $\vartheta(t)$ bestimmt haben.

Wenn wir (5.25) in die totale Ableitung von (5.23) nach t einsetzen, erhalten wir eine Bewegungsgleichung zweiter Ordnung für ϑ. Diese ist nichts anderes als die Lagrangegleichung 2. Art (3.18) unter Berücksichtigung der Erhaltung von p_φ. Tatsächlich kann das Problem direkter gelöst werden, wenn wir in bewährter Weise die Erhaltung der Hamiltonfunktion, d.h. der Energie $E = H$ verwenden. Dazu lösen wir (5.21) nach p_ϑ auf:

$$p_\vartheta = \pm\sqrt{2\,m\,\ell^2\,E + 2\,m^2\,g\,\ell^3\,\cos\vartheta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}}\,. \tag{5.26}$$

Dies können wir in (5.23) einsetzen und nach Separation der Variablen einmal nach t bzw. ϑ integrieren, womit das Problem zumindest formal gelöst ist.

Das Beispiel zeigt einerseits, dass der Hamilton-Formalismus wie bereits erwähnt rechentechnisch gegenüber dem Lagrange-Formalismus 2. Art keine wirklichen Vorteile besitzt. Andererseits zeigt das Beispiel auch, dass die Hamiltonsche Formulierung nützlich ist, um die Rechnung für ein Problem mit zyklischen Koordinaten zu organisieren.

Allgemein gilt, dass wenn eine Koordinate q_i im Lagrange-Formalismus zyklisch ist, d.h. in der Lagrangefunktion L nicht vorkommt, dann ist sie auch in der Hamiltonfunktion zyklisch, d.h. sie kommt in H nicht vor. Einerseits treten nämlich die Koordinaten q_i in der Transformation (5.8) $H = \sum_{j=1}^{n} p_j \, \dot{q}_j - L$ nicht explizit auf, andererseits hängt auch keiner der Impulse (3.165) $p_j = \partial \, L / \partial \dot{q}_j$ von q_i ab, wenn L nicht von q_i abhängt. Damit kann q_i auch bei der Elimination der Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ zugunsten der Impulse nicht wieder in die Hamiltonfunktion H eingeführt werden.

Die Hamiltonsche Bewegungsgleichung (5.11) für den zu einer *zyklischen Koordinaten* q_i kanonisch konjugierten Impuls lautet nun

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \, H}{\partial q_i} = 0 \, . \tag{5.27}$$

Der Impuls p_i ist also (wie bereits bekannt) eine Erhaltungsgröße und kann deswegen in H durch eine Konstante ersetzt werden. Somit können alle zyklischen Koordinaten und die zugehörigen Impulse aus der Hamiltonfunktion eliminiert werden und die Zahl der Koordinaten reduziert sich entsprechend. Nach der Lösung des reduzierten Problems erhält man die Lösung $q_i(t)$ für eine *zyklische Koordinate* durch einmalige Integration ihrer Hamiltonschen Bewegungsgleichung (5.11):

$$q_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \dot{q}_i = \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \frac{\partial \, H}{\partial p_i} \, . \tag{5.28}$$

5.1.3 Hamiltonsches Prinzip

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) sind historisch sehr eng mit dem Variationsprinzip verbunden [12,13]. In Unterkapitel 3.4.4 hatten wir gezeigt, dass die Lagrange-Gleichungen 2. Art äquivalent zur Stationarität der Wirkung S sind. Im Hamilton-Formalismus ist die Wirkung (3.161) mit Hilfe von (5.13) als

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, \{p_i\}, t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, p_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \right) \tag{5.29}$$

zu schreiben. Die Stationarität wird nun für den $2\,n$-dimensionalen *Phasenraum* gefordert, d.h. (5.29) ist bzgl. der unabhängigen Variablen q_i und p_i, $i = 1, \ldots, n$ zu

maximieren. Dabei sind als Verallgemeinerung von (3.163) die Randbedingungen

$$\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2)\,, \qquad \delta p_i(t_1) = 0 = \delta p_i(t_2) \tag{5.30}$$

zu erfüllen.

Die Variation der Wirkung (5.29) ergibt

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} \left[p_i\,\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\,\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\delta p_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i\big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} \left[-\dot{p}_i\,\delta q_i + \dot{q}_i\,\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\delta p_i \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Hier haben wir im ersten Schritt einmal partiell integriert. Der Randterm verschwindet im zweiten Schritt aufgrund der Randbedingungen (5.30) für die δq_i.

Aufgrund der Beliebigkeit und Unabhängigkeit der δq_i und δp_i folgt $\delta S = 0$ genau dann, wenn die Terme in den runden Klammern von (5.31) einzeln verschwinden. Letztere Bedingungen aber nun äquivalent zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11). Wir haben somit gezeigt, dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind zur Stationarität der in (5.29) definierten Wirkung.

Die Herleitung haben wir bewußt noch einmal ausgeführt. Wir hätten stattdessen auch direkt mit Hilfe von (5.29) die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.156) für die $2\,n$ Funktionen $q_i(t)$, $p_i(t)$ aufstellen können. Man sieht praktisch sofort (bei der Auswertung der Euler-Lagrange-Gleichung für $p_i(t)$ muß man den ersten Term von (5.29) einmal partiell integrieren), dass diese Euler-Lagrange-Gleichungen äquivalent zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) sind.

5.2 Poisson-Klammern

Die zeitliche Änderung einer Funktion $F(\{q_i\},\{p_i\},t)$ der Variablen q_i, p_i und t lautet

$$\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\,\dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\,\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\,\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{5.32}$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) eingesetzt.

Für den allgemeineren Fall zweier Funktionen $F(\{q_i\},\{p_i\},t)$ und $G(\{q_i\},\{p_i\},t)$ definiert man nun die *Poisson-Klammer*

$$\{F,G\}_{q,p} := \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) . \tag{5.33}$$

Das Subskript q,p wird auch gerne weggelassen. Um eine Verwechslung mit anderen Bedeutungen der geschweiften Klammern wie z.B. der abkürzenden Schreibweise für die Argumente zu vermeiden, werden wir dies im Skript jedoch nicht tun.

Mit Hilfe der Definition (5.33) kann man (5.32) kompakter schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \{F,H\}_{q,p} + \frac{\partial F}{\partial t} . \tag{5.34}$$

Folgende Eigenschaften der Poisson-Klammer $\{\cdot,\cdot\}_{q,p}$ folgen direkt aus ihrer Definition (5.33):

(i) Antisymmetrie

$$\{G,F\}_{q,p} = -\{F,G\}_{q,p} , \tag{5.35}$$

(ii) Linearität

$$\{F, c_1 G_1 + c_2 G_2\}_{q,p} = c_1 \{F,G_1\}_{q,p} + c_2 \{F,G_2\}_{q,p} , \tag{5.36}$$

mit zwei beliebigen Konstanten c_1 und c_2,

(iii)

$$\{F,c\}_{q,p} = 0 , \tag{5.37}$$

für konstantes c,

(iv) *Jacobi-Identität*[10]

$$\Big\{E,\{F,G\}_{q,p}\Big\}_{q,p} + \Big\{F,\{G,E\}_{q,p}\Big\}_{q,p} + \Big\{G,\{E,F\}_{q,p}\Big\}_{q,p} = 0 , \tag{5.38}$$

(v) Derivations-Eigenschaft

$$\{E, F\,G\}_{q,p} = \{E,F\}_{q,p}\,G + F\,\{E,G\}_{q,p} . \tag{5.39}$$

Aus der Definition (5.33) folgen ferner die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{q_i,p_j\}_{q,p} = \delta_{i,j} , \qquad \{q_i,q_j\}_{q,p} = 0 , \qquad \{p_i,p_j\}_{q,p} = 0 . \tag{5.40}$$

[10] Der Rechenaufwand für den Nachweis ist hier am größten.

Zur Illustration überprüfen wir die erste Identität (die anderen beiden Identitäten in (5.40) folgen analog):

$$\{q_i, p_j\}_{q,p} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\, \delta_{j,k} = \delta_{i,j} \,. \tag{5.41}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) lassen sich ebenfalls durch die Poisson-Klammern ausdrücken. Wenden wir das Ergebnis (5.34) auf $F = q_i$ oder $F = p_i$ an, so finden wir

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{q,p} \,, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{q,p} \,. \tag{5.42}$$

Tatsächlich kann man sich leicht überzeugen, dass man (5.11) erhält, wenn man die Definition (5.33) in (5.42) einsetzt.

Schreibt man die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in der Form (5.42), so genügen die Rechenregeln (i)–(v) zusammen mit den fundamentalen Poisson-Klammern (5.40) zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Die konkrete Realisierung der Poisson-Klammern wird dabei nicht benötigt, wie wir an dem folgenden Beispiel illustrieren wollen.

5.2.1 Harmonischer Oszillator

Wir betrachten als Beispiel einen *eindimensionalen harmonischen Oszillator* mit Ortskoordinate x, Masse m und Federkonstante k. In diesem Fall ist die Hamiltonfunktion gleich der Energie und kann, da wir in kartesischen Koordinaten arbeiten, sofort angegeben werden:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{k\,x^2}{2} \,. \tag{5.43}$$

Die Bewegungsgleichungen erhalten wir mit Hilfe von (5.42) und den Rechenregeln (i)–(v) sowie den fundamentalen Poisson-Klammern (5.40):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\}_{q,p} = \frac{1}{2\,m} \left\{x, p^2\right\}_{q,p} + \frac{k}{2} \left\{x, x^2\right\}_{q,p} \\ &= \frac{1}{2\,m} \left(\{x,p\}_{q,p}\, p + p\, \{x,p\}_{q,p} \right) + \frac{k}{2} \left(\{x,x\}_{q,p}\, x + x\, \{x,x\}_{q,p} \right) \\ &= \frac{p}{m} \,, \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \{p, H\}_{q,p} = \frac{1}{2\,m} \left\{p, p^2\right\}_{q,p} + \frac{k}{2} \left\{p, x^2\right\}_{q,p} \\ &= \frac{1}{2\,m} \left(\{p,p\}_{q,p}\, p + p\, \{p,p\}_{q,p} \right) + \frac{k}{2} \left(\{p,x\}_{q,p}\, x + x\, \{p,x\}_{q,p} \right) \\ &= k\, \{p,x\}_{q,p}\, x = -k\, \{x,p\}_{q,p}\, x = -k\,x \,. \end{aligned} \tag{5.45}$$

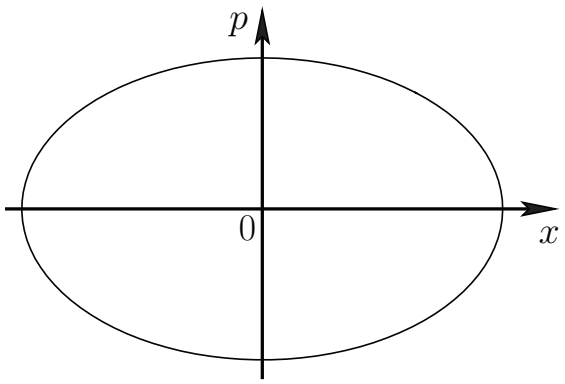


Abbildung 5.2: *Bahn des eindimensionalen harmonischen Oszillators im Phasenraum.*

Differenzieren wir (5.44) einmal nach t und setzen dann (5.45) ein, so finden wir $\ddot{x} = \dot{p}/m = -k\,x/m$, d.h. die allgemein bekannte Bewegungsgleichung $m\,\ddot{x} = -k\,x$ des harmonischen Oszillators.

Die Lösung der Bewegungsgleichungen (5.44,5.45) lautet

$$x(t) = x_0\,\cos(\omega\,t) + \frac{p_0}{m\,\omega}\,\sin(\omega\,t)\;, \qquad p(t) = p_0\,\cos(\omega\,t) - x_0\,m\,\omega\,\sin(\omega\,t) \tag{5.46}$$

mit $m\,\omega^2 = k$. Die Bahnkurve im Phasenraum ist also eine symmetrische Ellipse (siehe Abb. 5.2); insbesondere ist sie periodisch, d.h. eine geschlossene Kurve im Phasenraum. Das Verhältnis der Achsenabschnitte hängt unter anderem von der Wahl der Einheiten ab.

5.2.2 Poissonsches Theorem

Kehren wir zurück zu der Zeitentwicklung einer allgemeinen Funktion F. Nach (5.34) ist F genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn

$$\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}t} = \{F, H\}_{q,p} + \frac{\partial\,F}{\partial t} = 0 \tag{5.47}$$

gilt. Eine Funktion F, die nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. für die $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ gilt, ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Poisson-Klammer mit der Hamiltonfunktion verschwindet, d.h. wenn $\{F, H\}_{q,p} = 0$ ist.

Man kann – ebenfalls ausschließlich mit der Rechenregel (ii) – zeigen, dass für die Zeitableitung einer Poisson-Klammer zweier Funktionen F und G

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\{F, G\}_{q,p} = \left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,F\right), G\right\}_{q,p} + \left\{F, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,G\right\}_{q,p} \tag{5.48}$$

gilt. Dazu muß man lediglich die Zeitableitung als Differentialquotient darstellen und Linearität der Poisson-Klammer verwenden.

Mit (5.47) und (5.48) folgt das *Poissonsche Theorem*: Sind F und G Erhaltungsgrößen, so ist auch $\{F,G\}_{q,p}$ eine Erhaltungsgröße. Man beachte, dass die „neue" Erhaltungsgröße $\{F,G\}_{q,p}$ nicht unabhängig von den bereits bekannten sein muß, sondern eine Funktion der bereits bekannten Erhaltungsgrößen sein kann (und dann natürlich keine neue Information liefert).

5.2.3 Bedeutung für die Quantenmechanik

Die Möglichkeit, von der konkreten Realisierung der Poisson-Klammer (5.33) zu abstrahieren, ist vor allem für den *Übergang zur Quantenmechanik* wichtig. In der Quantenmechanik betrachtet man anstelle von Funktionen F lineare Operatoren $\hat{F}$ in einem Hilbertraum (damit wird natürlich auch aus der Hamiltonfunktion H ein Hamilton-Operator $\hat{H}$). Die Poisson-Klammer zweier Operatoren $\hat{F}$, $\hat{G}$ wird dann mit Hilfe des *Kommutators*

$$\left[\hat{F},\hat{G}\right] := \hat{F}\,\hat{G} - \hat{G}\,\hat{F} \tag{5.49}$$

wie folgt definiert

$$\left\{\hat{F},\hat{G}\right\}_{q,p} := \frac{1}{i\,\hbar}\,\left[\hat{F},\hat{G}\right]\,. \tag{5.50}$$

Hierbei ist $\hbar$ das reduzierte „Plancksche Wirkungsquantum".

Die obigen abstrakten Überlegungen können dann eins-zu-eins in die Quantenmechanik übernommen werden. So folgert man z.B. aus (5.40) und (5.50) die fundamentalen Vertauschungsrelationen $[\hat{x},\hat{p}] = i\,\hbar\,\mathbb{1}$. Insbesondere gilt $\lim_{\hbar\to 0}[\hat{x},\hat{p}] = 0$, so dass in diesem Grenzfall Ort und Impuls zu klassischen Variablen werden (können); der klassische Grenzfall der Quantenmechanik ist also der Limes $\hbar \to 0$. Auch bleiben die Bewegungsgleichungen (5.44) und (5.45) für den Ortsoperator $\hat{x}$ und den Impulsoperator $\hat{p}$ als *Heisenbergsche Bewegungsgleichungen* des *quantenmechanischen* eindimensionalen harmonischen Oszillators weiterhin gültig.

Da in der Quantenmechanik z.B. die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ nicht miteinander vertauschen, muß man z.B. in (5.39) sowie im allgemeinen auch beim Aufstellen des Hamilton-Operators $\hat{H}$ mit der Reihenfolge der Operatoren sehr vorsichtig sein.

Mehr zu diesem Thema werden Sie in der Quantenmechanik-Vorlesung erfahren.

5.3 Kleine Schwingungen

Wir wollen nun das Verhalten von N gekoppelten Oszillatoren bei kleinen Auslenkungen untersuchen. Natürlich kann dieses Problem auch mit dem Lagrange-Formalismus

diskutiert werden (siehe z.B. [10,14,18,28]), wir wollen es jedoch als ein Anwendungsbeispiel für den Hamiltonschen Formalismus verwenden.

Wir betrachten also ein System mit *konservativen Kräften* in einem *Inertialsystem*. Für den Fall, dass Zwangsbedingungen vorliegen, nehmen wir an, dass diese *holonom-skleronom* sind. Unter diesen Annahmen ist das Potential V ausschließlich eine Funktion der generalisierten Koordinaten.

Wir nehmen ferner an, dass das Potential bei $q_i^{(0)}$ ein Minimum besitzt und wollen kleine Auslenkungen $\bar{q}_i$ um dieses Minimum betachten. Die Minimalitäts-Bedingung stellt sicher, dass die generalisierten Kräfte (3.14) am Minimum von V verschwinden:

$$Q_j = -\left.\frac{\partial V}{\partial q_j}\right|_{q_i=q_i^{(0)}} = 0\,. \tag{5.51}$$

Dies bedeutet, dass das System am Minimum im Gleichgewicht ist. Das Minimum wird als *Gleichgewichtslage* bezeichnet.

Der lineare Term der Taylor-Entwicklung von V um das Minimum $q_i^{(0)}$ verschwindet:

$$V(\{q_i\}) = V(\{q_i^{(0)}\}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \bar{q}_i\,\mathcal{V}_{i,j}\,\bar{q}_j + \mathcal{O}(\{\bar{q}_i^3\}) \tag{5.52}$$

mit

$$\mathcal{V}_{i,j} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\,\partial q_j}\right|_{q_k=q_k^{(0)}}\,, \qquad \bar{q}_i = q_i - q_i^{(0)}\,. \tag{5.53}$$

Da wir um ein *Minimum* entwickelt haben, ist die Matrix $\mathcal{V}_{i,j}$ positiv definit; das Minimum ist stabil[11].

Wir wollen eine analoge Taylor-Entwicklung der kinetischen Energie T durchführen. Dazu müssen wir zunächst ihre Abhängigkeit von den Impulsen p_i untersuchen. Wir betrachten eine Reskalierung der Zeit mit einem Skalenfaktor τ

$$t \quad \mapsto \quad \tau\,t\,. \tag{5.54}$$

Unter dieser Transformation ändert sich bei den Koordinaten q_i lediglich das Argument entsprechend:

$$q_i(t) \quad \mapsto \quad q_i(\tau\,t)\,, \tag{5.55}$$

die Geschwindigkeiten werden hingegen reskaliert (die Notation ist ein wenig salopp; genaugenommen zählen wir nur Potenzen von t)

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial\,q_i}{\partial t} \quad \mapsto \quad \frac{\partial\,q_i}{\partial(\tau\,t)} = \tau^{-1}\,\dot{q}_i(\tau\,t)\,. \tag{5.56}$$

[11] Man kann auch andere Gleichgewichtslagen als ein Minimum betrachten. Dann besitzt $V_{i,j}$ negative (oder zumindest verschwindende) Eigenwerte; die entsprechende Gleichgewichtslage ist instabil.

In kartesischen Koordinaten hat die kinetische Energie die Form $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2$, so dass wir das Transformationsverhalten sofort ablesen:

$$T \quad \mapsto \quad \tau^{-2}\, T\,. \tag{5.57}$$

Das Transformationsverhalten von T ist unabhängig von der Wahl der räumlichen Koordinaten; somit gilt (5.57) auch in einem System generalisierter Koordinaten.

Wir benötigen ferner die kanonisch konjugierten Impulse

$$p_j = \frac{\partial\, L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial\, T}{\partial \dot{q}_j}\,, \tag{5.58}$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass das Potential V aufgrund der eingangs gemachten Annahmen nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ abhängt.

Anwendung von (5.56) und (5.57) auf (5.58) impliziert folgendes Reskalierungsverhalten der Impulse:

$$p_i \quad \mapsto \quad \frac{\tau^{-2}}{\tau^{-1}}\, p_i = \tau^{-1}\, p_i\,. \tag{5.59}$$

Aus (5.54) (5.57) und (5.59) folgt, dass die kinetische Energie eine *homogene Funktion zweiten Grades* der Impulse p_i ist und somit wie folgt geschrieben werden kann:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} p_i\, \tilde{\mathcal{T}}_{i,j}(\{q_k\})\, p_j\,, \tag{5.60}$$

wobei wir die Koeffizienten $\tilde{\mathcal{T}}_{i,j}(\{q_k\})$ symmetrisch wählen, d.h. $\tilde{\mathcal{T}}_{j,i} = \tilde{\mathcal{T}}_{i,j}$.

Wir entwickeln nun die Koeffizienten $\tilde{\mathcal{T}}_{i,j}$ um die Gleichgewichtslage $q_k^{(0)}$:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{i,j}(\{q_k\}) = \mathcal{T}_{i,j} + \mathcal{O}(\{\bar{q}_k\}) \tag{5.61}$$

mit $\mathcal{T}_{i,j} = \tilde{\mathcal{T}}_{i,j}(\{q_k^{(0)}\})$.

Betrachten wir nur die führenden Ordnungen in der kinetischen Energie (5.61) und dem Potential (5.52) (die Konstante $V(\{q_i^{(0)}\})$ ist physikalisch irrelevant und kann daher weggelassen werden), so erhalten wir die um das Minimum *linearisierte* Hamiltonfunktion

$$H_{\text{lin.}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} p_i\, \mathcal{T}_{i,j}\, p_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \bar{q}_i\, \mathcal{V}_{i,j}\, \bar{q}_j \tag{5.62}$$

mit konstanten Koeffizienten $\mathcal{T}_{i,j}$ und $\mathcal{V}_{i,j}$. Die Näherung des Potentials ist noch einmal in Abb. 5.3 skizziert. Man beachte, dass eine quadratische Näherung für das Potential V eine lineare Näherung für die Kraft bedeutet, denn letztere ist der Gradient von V.

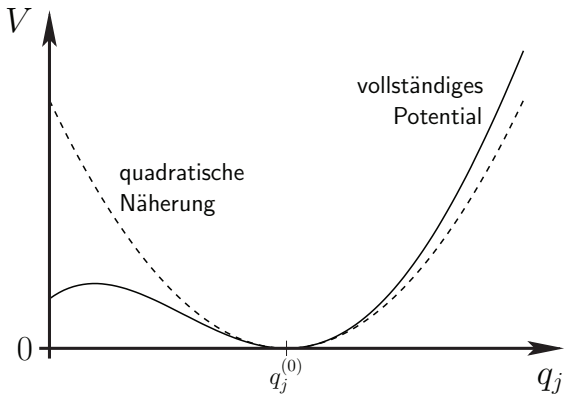


Abbildung 5.3: *Quadratische Näherung (gestrichelte Linie) um das Minimum $q_j^{(0)}$ eines Potentials (durchgezogene Linie).*

Die $\mathcal{V}_{i,j}$ sind (für ein hinreichend oft differenzierbares Potential) symmetrisch, d.h. $\mathcal{V}_{i,j} = \mathcal{V}_{j,i}$ (siehe (5.53)). Die Matrix $\mathcal{T}_{i,j}$ hatten wir ebenfalls symmetrisch gewählt; somit erhält man mit der Hamiltonfunktion (5.62) die folgenden Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11):

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial\, H_{\text{lin.}}}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{T}_{i,j}\, p_j\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\, H_{\text{lin.}}}{\partial \bar{q}_i} = -\sum_{j=1}^{N} \mathcal{V}_{i,j}\, \bar{q}_j\,. \tag{5.63}$$

Diese Gleichungen sind linear, so dass eine Superposition von Lösungen wieder eine Lösung darstellt.

Wir invertieren zunächst die Matrix $\mathcal{T}$ und lösen die erste der beiden Gleichungen von (5.63) nach p_i auf:

$$p_i = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{T}_{i,j}^{-1}\, \dot{\bar{q}}_j\,. \tag{5.64}$$

Differenzieren wir dies einmal nach der Zeit t und setzen dann die zweite der Gleichungen (5.63) ein, so finden wir[12]

$$\sum_{j=1}^{N} \left[\mathcal{T}_{i,j}^{-1}\, \ddot{\bar{q}}_j + \mathcal{V}_{i,j}\, \bar{q}_j\right] = 0\,. \tag{5.65}$$

Eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung findet man mit dem *Ansatz*

$$\bar{q}_j(t) = C\, a_j\, \cos(\omega\, t - \delta) \tag{5.66}$$

[12]Im Prinzip findet man das gleiche Ergebnis auch mit dem Lagrange-Formalismus. Da man hier die kinetische Energie bis zu zweiter Ordnung in den *Geschwindigkeiten* $\dot{\bar{q}}_j$ anstelle in den *Impulsen* p_j nähert, tritt bei der Rechnung im Lagrange-Formalismus genau die inverse der oben eingeführten Matrix $\mathcal{T}$ auf.

mit einer gemeinsamen Winkelfrequenz ω, einer gemeinsamen Phasenverschiebung δ und individuellen Amplituden a_j. Wir haben ferner einen globalen Vorfaktor C eingeführt.

Setzt man den Ansatz (5.66) in (5.65) ein, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{N} \left[\mathcal{V}_{i,j} - \omega^2\, \mathcal{T}_{i,j}^{-1}\right]\, a_j = 0\,, \tag{5.67}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\left[\mathcal{V} - \omega^2\, \mathcal{T}^{-1}\right]\, \vec{a} = \vec{0}\,. \tag{5.68}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist entweder $a_j = 0$ für alle j (d.h. $\vec{a} = \vec{0}$), oder

$$\det\left(\mathcal{V} - \omega^2\, \mathcal{T}^{-1}\right) = 0\,. \tag{5.69}$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für die *Eigenfrequenzen* ω, für die nicht-triviale Lösungen der Form (5.66) existieren. Die Gleichung (5.69) wird auch als *Säkulargleichung* bezeichnet.

Die Säkulargleichung (5.69) hat N Lösungen ω_r (man kann z.B. $\omega_r \geq 0$ wählen) mit zugehörigen Vektoren $\vec{a}_r$, die man für gegebenes $\omega = \omega_r$ aus dem linearen Gleichungssystem (5.68) erhält. Die entsprechenden Lösungen (5.66) $\vec{\bar{q}}_r(t) = C_r\, \vec{a}_r \cos(\omega_r\, t - \delta_r)$, bei denen alle Freiheitsgrade mit derselben Frequenz ω_r schwingen, heißen *Eigenschwingungen*, *Fundamentalschwingungen* oder *Normalschwingungen*. Eine allgemeine Lösung $\bar{q}_j(t)$ der Bewegungsgleichung (5.65) erhält man durch Superposition, d.h.

$$\vec{\bar{q}}(t) = \sum_{r=1}^{N} C_r\, \vec{a}_r\, \cos(\omega_r\, t - \delta_r) \tag{5.70}$$

in Vektorschreibweise. Normiert man z.B. $|\vec{a}_r| = 1$, so sind $C_r \in \mathbb{R}$ und $\delta_r \in [0, 2\,\pi[$ die $2\,N$ Intgegrationskonstanten der N Differentialgleichungen zweiter Ordnung (5.65) bzw. der $2\,N$ Differentialgleichungen erster Ordnung (5.63). Man beachte, dass zwar alle Amplituden und Frequenzen der Eigenschwingungen zeitlich konstant sind. Durch die Summation in (5.70) kann es jedoch bei einer allgemeinen Lösung zum An- bzw. Abschwellen der Gesamtamplitude kommen. Dieses Phänomen wird als *Schwebung* bezeichnet.

Wir wollen nun zeigen, wie man die Bewegungsgleichungen (5.65) allgemein entkoppeln kann. Dazu beachten wir zunächst, dass wir die Matrix $\mathcal{T}$ mit Hilfe einer orthogonalen Transformation O ($O^\dagger\, O = O\, O^\dagger = \mathbb{1}$) in Diagonalform bringen können:

$$O^\dagger\, \mathcal{T}\, O = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_N \end{pmatrix}\,. \tag{5.71}$$

Aufgrund der Positivität der kinetischen Energie gilt $t_i > 0$. Somit können wir mit Hilfe von (5.71) die Wurzel aus der Matrix $\mathcal{T}$ definieren:

$$\mathcal{T}^{\pm 1/2} = O \begin{pmatrix} t_1^{\pm 1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_N^{\pm 1/2} \end{pmatrix} O^\dagger \,. \tag{5.72}$$

Wir multiplizieren nun (5.68) von links mit $\mathcal{T}^{1/2}$ und fügen eine $\mathbb{1} = \mathcal{T}^{1/2}\,\mathcal{T}^{-1/2}$ ein:

$$\vec{0} = \mathcal{T}^{1/2}\,\left[\mathcal{V} - \omega^2\,\mathcal{T}^{-1}\right]\,\mathcal{T}^{1/2}\,\mathcal{T}^{-1/2}\,\vec{a} = \left[\mathcal{T}^{1/2}\,\mathcal{V}\,\mathcal{T}^{1/2} - \omega^2\,\mathbb{1}\right]\,\tilde{\vec{a}} \tag{5.73}$$

mit $\tilde{\vec{a}} = \mathcal{T}^{-1/2}\,\vec{a}$.

Nach (5.73) sind die Eigenfrequenzen ω_r^2 die Eigenwerte von $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{T}^{1/2}\,\mathcal{V}\,\mathcal{T}^{1/2}$. Da $\tilde{\mathcal{V}}$ eine symmetrische Matrix ist, existiert ein orthonormales System von Eigenvektoren $\tilde{\vec{a}}_r$ zu den Eigenwerten ω_r^2, d.h.

$$\tilde{\mathcal{V}}\,\tilde{\vec{a}}_r = \mathcal{T}^{1/2}\,\mathcal{V}\,\mathcal{T}^{1/2}\,\tilde{\vec{a}}_r = \omega_r^2\,\tilde{\vec{a}}_r \tag{5.74}$$

mit

$$\tilde{\vec{a}}_r \cdot \tilde{\vec{a}}_s = \delta_{r,s}\,. \tag{5.75}$$

Für die zugehörige Basis

$$\vec{a}_r = \mathcal{T}^{1/2}\,\tilde{\vec{a}}_r \tag{5.76}$$

gilt:

$$\vec{a}_r \cdot \mathcal{T}^{-1}\vec{a}_s = \tilde{\vec{a}}_r \cdot \mathcal{T}^{1/2}\,\mathcal{T}^{-1}\,\mathcal{T}^{1/2}\,\tilde{\vec{a}}_s = \tilde{\vec{a}}_r \cdot \tilde{\vec{a}}_s = \delta_{r,s}\,, \tag{5.77}$$

d.h. die $\vec{a}_r$ bilden eine *bezüglich $\mathcal{T}^{-1}$ orthonormale* Basis. Die $\vec{a}_r$ heißen *Normalkoordinaten*.

Wir schreiben die Bewegungsgleichung (5.65) in der Form

$$\mathcal{T}^{-1}\,\ddot{\vec{q}} + \mathcal{V}\,\vec{q} = \vec{0} \tag{5.78}$$

und drücken den Koordinatenvektor $\vec{q}(t)$ in der Basis der Normalkoordinaten aus, d.h.

$$\vec{q}(t) = \sum_{r=1}^{N} Q_r(t)\,\vec{a}_r = \sum_{r=1}^{N} Q_r(t)\,\mathcal{T}^{1/2}\,\tilde{\vec{a}}_r \tag{5.79}$$

mit zeitabhängigen Koeffizientenfunktionen $Q_r(t)$. Einsetzen von (5.79) in (5.78)

führt auf:

$$\begin{aligned}
& \vec{0} &=& \sum_{r=1}^{N} \left[\ddot{Q}_r(t)\, \mathcal{T}^{-1/2} + Q_r(t)\, \mathcal{V}\, \mathcal{T}^{1/2} \right] \tilde{\vec{a}}_r \\
\Leftrightarrow \qquad & \vec{0} &=& \sum_{r=1}^{N} \left[\ddot{Q}_r(t) + Q_r(t)\, \mathcal{T}^{1/2}\, \mathcal{V}\, \mathcal{T}^{1/2} \right] \tilde{\vec{a}}_r \\
& &=& \sum_{r=1}^{N} \left[\ddot{Q}_r(t) + Q_r(t)\, \omega_r^2 \right] \tilde{\vec{a}}_r \\
\Leftrightarrow \qquad & 0 &=& \ddot{Q}_r(t) + \omega_r^2\, Q_r(t)\,, \qquad r = 1, \ldots, N\,.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Damit ist gezeigt, dass die Bewegungsgleichungen (5.65) in Normalkoordinaten *entkoppeln*!

Wir wollen nun zeigen, dass auch die kinetische Energie sowie die potentielle Energie in Normalkoordinaten eine besonders einfache Form annehmen. Dazu differenzieren wir (5.79) einmal nach der Zeit und setzen die Impulse nach (5.64) ein:

$$\vec{p} = \sum_{r=1}^{N} \dot{Q}_r(t)\, \mathcal{T}^{-1}\, \vec{a}_r\,. \tag{5.81}$$

Damit gilt für die kinetische Energie (erster Summand von (5.62)) in Normalkoordinaten und Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\, \vec{p} \cdot \mathcal{T}\, \vec{p} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{N} \dot{Q}_r(t)\, \vec{a}_r \cdot \mathcal{T}^{-1}\, \mathcal{T}\, \mathcal{T}^{-1}\, \vec{a}_s\, \dot{Q}_s(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{N} \dot{Q}_r(t)\, \dot{Q}_s(t)\, \vec{a}_r \cdot \mathcal{T}\, \vec{a}_s = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N} \dot{Q}_r^2(t)\,.
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Im letzten Schritt haben wir hierbei die Relation (5.77) verwendet.

Analog finden wir für die potentielle Energie (zweiter Summand von (5.62)):

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\, \vec{q} \cdot \mathcal{V}\, \vec{q} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{N} Q_r(t)\, \vec{a}_r \cdot \mathcal{V}\, \vec{a}_s\, Q_s(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{N} Q_r(t)\, Q_s(t)\, \tilde{\vec{a}}_r \cdot \mathcal{T}^{1/2}\, \mathcal{V}\, \mathcal{T}^{1/2}\, \tilde{\vec{a}}_s = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N} \omega_r^2\, Q_r^2(t)\,.
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Beim Übergang von der ersten auf die zweite Zeile haben wir (5.76) verwendet; im letzten Schritt kommen die Eigenwertgleichung (5.74) sowie die Orthornormalitätsrelation (5.75) zum Einsatz.

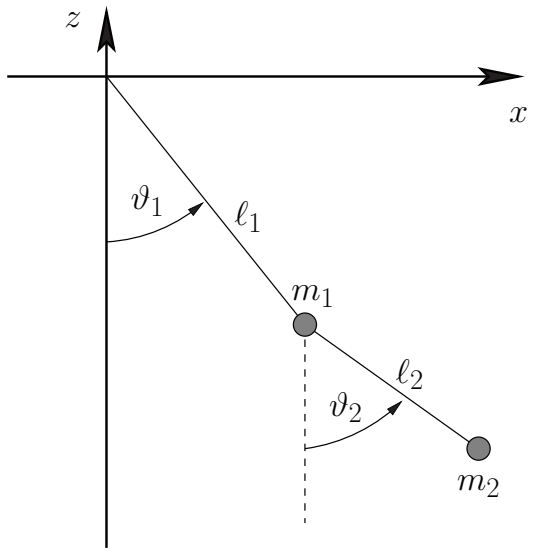


Abbildung 5.4: *Ebenes Doppelpendel: Zwei Massen m_1 und m_2 schwingen in der x-z-Ebene an zwei aneinander gefügten Fäden der Länge ℓ_1 bzw. ℓ_2.*

Aufgrund der gewählten Variablen folgt aus (5.82) und (5.83), dass die *Lagrangefunktion* L in Normalkoordinaten *diagonal* ist. Man kann allerdings auch leicht zu den Impulsen $P_r = \partial L/\partial \dot{Q}_r = \dot{Q}_r$ übergehen und findet, dass die *Hamiltonfunktion* ebenfalls diagonal in Normalkoordinaten ist.

5.3.1 Ebenes Doppelpendel

Als Beispiel betrachten wir das in Abb. 5.4 skizzierte ebene Doppelpendel. Dieses Doppelpendel besteht aus zwei Massen m_1 und m_2, die untereinander an Fäden der Länge ℓ_1 bzw. ℓ_2 hängen. Als generalisierte Koordinaten verwenden wir die Winkel ϑ_1 bzw. ϑ_2 zur z-Achse.

Die Lagrangefunktion $L = T - V$ des Doppelpendels stellt man in analoger Weise auf wie die Lagrangefunktion des mathematischen Pendels (siehe Unterkapitel 2.4.2 und 3.1.2).

Zunächst findet man für die kinetische Energie

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \left(\ell_1 \dot{\vartheta}_1\right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\ell_2 \dot{\vartheta}_2\right)^2 + m_2 \, l_1 \, l_2 \, \dot{\vartheta}_1 \, \dot{\vartheta}_2 \, \cos\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) . \quad (5.84)$$

Die potentielle Energie lautet

$$V = -g \, \left((m_1 + m_2) \, \ell_1 \, \cos\vartheta_1 + m_2 \, \ell_2 \, \cos\vartheta_2\right) . \quad (5.85)$$

Um zum Hamilton-Formalismus überzugehen (für das Doppelpendel gilt $H = T + V$), benötigt man zunächst die kanonisch konjugierten Impulse. Man findet unter

Verwendung von (5.84)

$$\begin{aligned} p_{\vartheta_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_1} = (m_1+m_2)\,\ell_1^2\,\dot{\vartheta}_1 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\vartheta}_2\,\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\;, \\ p_{\vartheta_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}_2} = m_2\,\ell_2^2\,\dot{\vartheta}_2 + m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\dot{\vartheta}_1\,\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\;. \end{aligned} \tag{5.86}$$

Nach Inversion dieser Beziehungen kann man die kinetische Energie (5.84) in der Form (5.60) schreiben:

$$T = \frac{1}{2}\left(p_{\vartheta_1}\,\dot{\vartheta}_1 + p_{\vartheta_2}\,\dot{\vartheta}_2\right) = \frac{1}{2}\,\begin{pmatrix} p_{\vartheta_1} & p_{\vartheta_2}\end{pmatrix}\,\tilde{\mathcal{T}}(\vartheta_1,\vartheta_2)\,\begin{pmatrix} p_{\vartheta_1}\\ p_{\vartheta_2}\end{pmatrix} \tag{5.87}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}(\vartheta_1,\vartheta_2) &= \frac{1}{m_2\,\ell_1^2\,\ell_2^2\,(m_1+m_2-m_2\,\cos(\vartheta_1-\vartheta_2))} \\ &\quad\times\begin{pmatrix} m_2\,\ell_2^2 & -m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\\ -m_2\,\ell_1\,\ell_2\,\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & (m_1+m_2)\,\ell_1^2\end{pmatrix}\;. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Man beachte, dass die Koeffizienten der Matrix von ϑ_1 und ϑ_2 abhängen.

Wir nähern nun bis zur niedrigsten Ordnung in ϑ_1 und ϑ_2 um die Gleichgewichtslage $\vartheta_1=\vartheta_2=0$. Zunächst setzen wir $\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\approx 1$ in (5.88) und erhalten

$$\tilde{\mathcal{T}}(\vartheta_1,\vartheta_2) \quad\to\quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1\,\ell_1^2} & -\frac{1}{m_1\,\ell_1\,\ell_2}\\ -\frac{1}{m_1\,\ell_1\,\ell_2} & \frac{m_1+m_2}{m_1\,m_2\,\ell_2^2}\end{pmatrix}\;, \tag{5.89}$$

bzw.[13]

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)\,\ell_1^2 & m_2\,\ell_1\,\ell_2\\ m_2\,\ell_1\,\ell_2 & m_2\,\ell_2^2\end{pmatrix}\;. \tag{5.90}$$

Wir entwickeln nun die potentielle Energie (5.85) analog und schreiben sie in der Form (5.52)

$$V = \text{konst.} + \frac{1}{2}\,\begin{pmatrix}\vartheta_1 & \vartheta_2\end{pmatrix}\,\mathcal{V}\,\begin{pmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{pmatrix} + \mathcal{O}(\vartheta_i^4) \tag{5.91}$$

mit

$$\mathcal{V} = g\,\begin{pmatrix}(m_1+m_2)\,\ell_1 & 0\\ 0 & m_2\,\ell_2\end{pmatrix}\;, \tag{5.92}$$

Um unübersichtliche Ausdrücke zu vermeiden, betrachten wir nun den Spezialfall $m := m_1 = m_2$ und $\ell := \ell_1 = \ell_2$. Damit wird die Säkulargleichung (5.69) zu

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\mathcal{V}-\omega^2\,\mathcal{T}^{-1}\right) = \det m\,\ell\,\begin{pmatrix} 2\,g-2\,\omega^2\,\ell & -\omega^2\,\ell\\ -\omega^2\,\ell & g-\omega^2\,\ell\end{pmatrix} \\ &= m^2\,\ell^4\left(\omega^4 - 4\,\frac{g}{\ell}\,\omega^2 + 2\,\frac{g^2}{\ell^2}\right)\;. \end{aligned} \tag{5.93}$$

[13] Im Lagrange-Formalismus gelangt man schneller zu diesem Ergebnis, denn man kann die Näherung direkt in (5.84) vornehmen.

Die Nullstellen dieser Gleichung sind die beiden Eigenfrequenzen

$$\omega_1^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)\,\frac{g}{\ell}\,, \qquad \omega_2^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\,\frac{g}{\ell}\,. \tag{5.94}$$

5.4 Kanonische Transformationen

In Unterkapitel 3.1.5 hatten wir die Forminvarianz der Lagrangegleichungen 2. Art unter Punkttransformationen betont. Man kann nun die Frage nach der Forminvarianz des Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) unter *invertierbaren* Transformationen des *Phasenraums*

$$q_i \mapsto Q_i = Q_i(\{q_i\},\{p_i\},t)\,, \qquad p_i \mapsto P_i = P_i(\{q_i\},\{p_i\},t) \tag{5.95}$$

stellen. Diese Transformationen schließen die Punkttransformationen (3.45) ein, jedoch wird hier auch eine Transformation der Impulse auf Koordinaten (und umgekehrt) erlaubt. Dies erweitert die Möglichkeiten, die Hamiltonfunktion auf einfache Formen zu bringen, z.B. auf solche, für die möglichst viele Koordinaten zyklisch sind.

Gesucht sind also solche Transformationen (5.95), für die es eine transformierte Hamiltonfunktion $K(\{Q_i\},\{P_i\},t)$ gibt, so dass die Bewegungsgleichungen (5.11) in den neuen Variablen ebenfalls die Form

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial\, K}{\partial P_i}\,, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial\, K}{\partial Q_i} \tag{5.96}$$

besitzen. Diese Forderung wird allerdings nicht von jeder beliebigen Transformation der Form (5.95) erfüllt.

> *Definition:* Invertierbare Transformationen des Phasenraums der Form (5.95) heißen *kanonisch*, falls für *alle* H eine neue Hamiltonfunktion $K(\{Q_i\},\{P_i\},t)$ existiert, so dass die Bewegungsgleichungen für die transformierten Variablen (5.96) lauten.

Wir wollen nun ein Kriterium aufstellen, ob eine gegebene Phasenraum-Transformation (5.95) kanonisch ist oder nicht. Dazu verwenden wir die Äquivalenz der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zum Hamiltonschen Prinzip (siehe Unterkapitel 5.1.3). Einerseits sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) für H äquivalent zu

$$\delta S_H = \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, p_i - H(\{q_i\},\{p_i\},t)\right) = 0\,. \tag{5.97}$$

Andererseits haben wir gefordert, dass die Funktion K auf die Bewegungsgleichungen (5.96) führen soll. Dies ist äquivalent zu

$$\delta S_K = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i \, P_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \right) = 0 \,. \tag{5.98}$$

Nun sind die Bedingungen (5.97) und (5.98) genau dann äquivalent, wenn $\delta S_H = c \, \delta S_K$ mit einer Konstanten $c \neq 0$ gilt. Dies wiederum bedeutet, dass sich die Integranden abgesehen von dem Vorfaktor c nur um die totale zeitliche Ableitung einer Funktion $F(\{q_i\}, \{p_i\}, \{Q_i\}, \{P_i\}, t)$ unterscheiden können[14]:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, p_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \right) \;\; &= \;\; c \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i \, P_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \right) \\ &\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\{q_i\}, \{p_i\}, \{Q_i\}, \{P_i\}, t) \,. \end{aligned} \tag{5.99}$$

Die Funktion F heißt *Erzeugende* der Transformation. Kanonische Transformationen, die (5.99) erfüllen, heißen *kanonisch im weiteren Sinn*.

Im allgemeinen kann durch eine nachfolgende Transformation

$$Q_i \;\to\; \hat{Q}_i = c \, Q_i \,, \quad P_i \;\to\; \hat{P}_i = P_i \,, \quad K \;\to\; \hat{K} = c \, K \left(\{ c^{-1} \, \hat{Q}_i \}, \{ \hat{P}_i \}, t \right) \tag{5.100}$$

die Konstante auf $\hat{c} = 1$ gesetzt werden. Eine solche Reskalierung liefert keine wichtigen neuen Informationen, so dass man sich auf den Spezialfall $c = 1$ von (5.99) beschränken kann:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, p_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i \, P_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \right) \\ &\qquad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\{q_i\}, \{p_i\}, \{Q_i\}, \{P_i\}, t) \,. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Kanonische Transformationen, die (5.101) erfüllen, heißen *kanonisch im engeren Sinn*; oft spricht man auch einfach nur von „kanonisch“.

Die Funktion F wurde als Funktion von $4\,n$ Variablen eingeführt, für die die $2\,n$ Beziehungen (5.95) gelten. Somit sind nur $2\,n$ Variable unabhängig. Allgemein besteht bei der Auswahl von $2\,n$ unabhängigen Variablen eine weitreichende Freiheit. Es ist üblich, sich zunächst auf komplette Sätze von alten bzw. neuen Koordinaten bzw. Impulsen zu beschränken. Ferner ist die Auswahl nur der alten oder nur der

[14] Aufgrund der Randbedingungen (5.30) verschwindet die Variation von F am Rand.

neuen Variablen nicht sinnvoll, da die Funktion F in diesen beiden Fällen keine Information über die Phasenraumtransformation (5.95) enthält. Somit haben wir vier Möglichkeiten, unabhängige Variable zu wählen[15]:

(i) $F_1(\{q_i\},\{Q_i\},t)$:
Für diese Erzeugende gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\,\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,, \tag{5.102}$$

so dass (5.101) die Form

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,p_i - H = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\,\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\,\dot{q}_i\right) - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{5.103}$$

annimmt. Da $\dot{q}_i(t)$ und $\dot{Q}_i(t)$ unabhängig sind, können wir ihre Koeffizienten vergleichen. Wir finden:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\,, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\,, \qquad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}\,. \tag{5.104}$$

(ii) $F_2(\{q_i\},\{P_i\},t)$:
Für die Erzeugende F_2 gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial P_i}\,\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,, \tag{5.105}$$

Wir müssen nun $\dot{Q}_i$ durch die unabhängigen Variablen ausdrücken:

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\,\dot{P}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\,. \tag{5.106}$$

Einsetzen von (5.105) und (5.106) in (5.101) führt auf:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,p_i - H &= \sum_{i=1}^{n}\left(P_i\,\dot{Q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\,\dot{P}_i\right) - K + \frac{\partial F_2}{\partial t}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(P_i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\,\dot{P}_j\right) + P_i\,\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\,\dot{P}_i\right)\\ &\quad -K + \frac{\partial F_2}{\partial t}\,.\end{aligned} \tag{5.107}$$

[15] Im Regelfall ist jede dieser Möglichkeiten zulässig; lediglich in singulären Fällen existieren einzelne Erzeugende F_i nicht.

Wir vergleichen die Koeffizienten der unabhängigen Funktionen $\dot{q}_i(t)$ und $\dot{P}_i(t)$ und finden:

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(F_2 + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j\right), \\ 0 &= \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(F_2 + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j\right) - Q_i, \\ K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} P_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} = H + \frac{\partial}{\partial t}\left(F_2 + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j\right). \end{aligned} \tag{5.108}$$

Führen wir nun die Funktion

$$\hat{F}_2 := F_2 + \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j(\{q_i\}, \{P_i\}, t) \tag{5.109}$$

ein, so nehmen die Gleichungen (5.108) die einfache Form

$$p_i = \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial P_i}, \qquad K = H + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial t} \tag{5.110}$$

an.
Schreibt man (5.109) in der Form $F_2 = \hat{F}_2 - \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j$, so erkennt man bis auf das Vorzeichen die Legendre-Transformation (5.3) wieder. Dabei entspricht die Beziehung für Q_i in (5.110) der Variablen-Definition (5.2). Eliminieren wir nun die Impulse P_i zugunsten der Koordinaten Q_i, kann die Funktion F_2 in der Form F_1 geschrieben werden, d.h. die Funktionen $\hat{F}_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$ und $F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t)$ gehen über eine Legendre-Transformation auseinander hervor.

(iii) $F_3(\{p_i\}, \{Q_i\}, t)$:
Für diese Erzeugende empfiehlt sich die Verwendung der folgenden Legendre-Transformation:

$$\hat{F}_3 := F_3 - \sum_{j=1}^{n} p_j q_j(\{p_i\}, \{Q_i\}, t). \tag{5.111}$$

Damit führt (5.101) auf

$$\begin{aligned} K - H - \sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i P_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{F}_3 + \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \dot{p}_i q_i \right) + \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5.112}$$

Da $\dot{p}_i(t)$ und $\dot{Q}_i(t)$ unabhängig sind, können wir ihre Koeffizienten vergleichen. Wir finden:

$$q_i = -\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial p_i}\,, \qquad P_i = -\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial Q_i}\,, \qquad K = H + \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial t}\,. \tag{5.113}$$

(iv) $F_4(\{p_i\},\{P_i\},t)$:
Hier empfiehlt sich die Verwendung einer doppelten Legendre-Transformation:

$$\hat{F}_4 := F_4 - \sum_{j=1}^{n} p_j\, q_j(\{p_i\},\{P_i\},t) + \sum_{j=1}^{n} P_j\, Q_j(\{p_i\},\{P_i\},t)\,. \tag{5.114}$$

Nun führt (5.101) auf

$$\begin{aligned} K - H &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat{F}_4 + \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i\, q_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{P}_i\, Q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \hat{F}_4}{\partial p_i}\,\dot{p}_i + \frac{\partial \hat{F}_F}{\partial P_i}\,\dot{P}_i + \dot{p}_i\, q_i - \dot{P}_i\, Q_i \right) + \frac{\partial \hat{F}_4}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{5.115}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von $\dot{p}_i$ und $\dot{P}_i$ zeigt, dass

$$q_i = -\frac{\partial \hat{F}_4}{\partial p_i}\,, \qquad Q_i = \frac{\partial \hat{F}_4}{\partial P_i}\,, \qquad K = H + \frac{\partial \hat{F}_4}{\partial t} \tag{5.116}$$

gilt.

In allen vier Fällen gilt, dass die $2\,n$ Transformationsgleichungen (5.95) kompakt in *einer* Funktion F_i (bzw. $\hat{F}_i$) kodiert werden können, siehe (5.104), (5.110), (5.113) bzw. (5.116).

Die Ergebnisse (5.104), (5.110), (5.113) und (5.116) zeigen ferner, dass bei allen vier Erzeugenden $K - H$ gleich der partiellen zeitlichen Ableitung der Erzeugenden ist. Für nicht explizit zeitabhängige Transformationen gilt daher $K = H$, so dass zeitunabhängige Transformationen nach (5.101) genau dann kanonisch im engeren Sinn sind, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\dot{q}_i\, p_i - \dot{Q}_i\, P_i \Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, F \tag{5.117}$$

gilt. Die linke Seite ist somit eine totale zeitliche Ableitung.

Wir wollen nun ein paar Beispiele diskutieren.

5.4.1 Berechnung der Erzeugenden aus der Transformation

Wir betrachten als Beispiel die Transformation

$$Q = p\,q^2\,, \qquad P = \frac{1}{q} \tag{5.118}$$

und wählen q und Q als unabhängige Variable. Gesucht ist also eine Erzeugende vom Typ $F_1(q,Q,t)$. Um diese zu finden, integrieren wir zunächt die erste Gleichung von (5.104):

$$F_1(q,Q,t) = \int \mathrm{d}q\, p(q,Q) + g(Q,t) = \int \mathrm{d}q\, \frac{Q}{q^2} + g(Q,t) = -\frac{Q}{q} + g(Q,t)\,. \tag{5.119}$$

Hierbei tritt eine Funktion $g(Q,t)$ als Integrationskonstante auf.

Wir verwenden nun die zweite Gleichung von (5.104):

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{q} - \frac{\partial g}{\partial Q}\,. \tag{5.120}$$

Der Vergleich mit (5.118) zeigt, dass $\partial g/\partial Q = 0$ sein muß. Somit gilt $g = g(t)$. Die Wahl $g(t) = 0$ führt auf

$$F_1(q,Q) = -\frac{Q}{q}\,. \tag{5.121}$$

Aus den obigen Überlegungen folgt, dass die Transformation (5.118) die Erzeugende F_1 eindeutig bis auf eine additive Funktion $g(t)$ als (5.121) festlegt.

Da eine Erzeugende $F_1(q,Q)$ existiert, ist die Transformation (5.118) kanonisch.

5.4.2 Berechnung der Transformation aus der Erzeugenden

Als Beispiel betrachten wir die Erzeugende

$$\hat{F}_2(q,P) = P\left(\ln\left(-\frac{P}{q}\right) - 1\right)\,. \tag{5.122}$$

Die zugehörige Variablentransformation (5.95) finden wir mit Hilfe von (5.110):

$$p = \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial q} = -q\,\frac{P}{q^2} = -\frac{P}{q}\,, \qquad Q = \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial P} = \ln\left(-\frac{P}{q}\right) - 1 + P\,\frac{1}{q}\,\frac{q}{P} = \ln\left(-\frac{P}{q}\right)\,. \tag{5.123}$$

Dies kann leicht auf die gesuchte Form gebracht werden:

$$Q = \ln p\,, \qquad P = -q\,p\,. \tag{5.124}$$

Diese Transformation ist per Konstruktion kanonisch.

5.4.3 Harmonischer Oszillator

Wir betrachten noch einmal den eindimensionalen harmonischen Oszillator, dessen Hamiltonfunktion (5.43) wir nun unter Verwendung von $k = m\,\omega^2$ als

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{m}{2}\,\omega^2\,q^2 \tag{5.125}$$

schreiben. Als Erzeugende wählen wir

$$F_1(q,Q) = -\frac{m}{2}\,\omega\,q^2\,\tan Q\,. \tag{5.126}$$

Die zugehörige kanonische Transformation ergibt sich aus (5.104) zu:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = -m\,\omega\,q\,\tan Q\,, \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m}{2}\,\omega\,q^2\,\frac{\partial}{\partial Q}\,\frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{m}{2}\,\omega\,q^2\,\left(\frac{\cos Q}{\cos Q} + \frac{\sin^2 Q}{\cos^2 Q}\right) \\ &= \frac{m}{2}\,\omega\,q^2\,\frac{1}{\cos^2 Q}\,, \end{aligned} \tag{5.127}$$

bzw.

$$q = \sqrt{\frac{2\,P}{m\,\omega}}\,\cos Q\,, \qquad p = -\sqrt{2\,m\,\omega\,P}\,\sin Q\,. \tag{5.128}$$

Da die Funktion F_1 (5.126) nicht explizit von der Zeit abhängt, ergibt sich die neue Hamiltonfunktion nach (5.104) zu

$$K(Q,P) = H(q(Q,P),p(Q,P)) = \omega\,P\,\sin^2 Q + \omega\,P\,\cos^2 Q = \omega\,P\,. \tag{5.129}$$

Die Bewegungsgleichungen (5.96) sind besonders einfach (schließlich ist die Koordinate Q zyklisch):

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega\,, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0\,. \tag{5.130}$$

Die Lösung können wir direkt als

$$Q(t) = \omega\,t - \delta\,, \qquad P(t) = \frac{K}{\omega} = \frac{E}{\omega} \tag{5.131}$$

angeben, wobei E die Energie des harmonischen Oszillators ist. Einsetzen von (5.131) in (5.128) liefert die Lösung in den alten Variablen:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2}}\,\cos\left(\omega\,t - \delta\right)\,, \qquad p(t) = -\sqrt{2\,m\,E}\,\sin\left(\omega\,t - \delta\right)\,. \tag{5.132}$$

Diese Lösung kann man leicht in die bereits diskutierte Form (5.46) bringen, wobei die Integrationskonstanten die Beziehungen $x_0 = \sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2}}\,\cos\delta$, $p_0 = \sqrt{2\,m\,E}\,\sin\delta$ erfüllen.

5.4.4 Kanonische Invarianz der Poisson-Klammern

In diesem Unterkapitel wollen wir zeigen, dass eine Transformation (5.95) genau dann kanonisch im engeren Sinn ist, wenn sie die fundamentalen Poisson-Klammern (5.40) invariant läßt. Die meisten Textbücher liefern zumindest auf elementarem Niveau keine vollständigen Beweise und auch wir werden es uns erlauben, vereinfachende Annahmen zu machen.

Zunächst wollen wir zeigen, dass die *Poisson-Klammer (5.33) invariant unter kanonischen Transformationen* ist. Wir wählen als unabhängige Variable[16] q_i und Q_i. Somit existiert eine Erzeugende vom Typ $F_1(\{q_i\},\{Q_i\},t)$. Aus (5.104) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}\,, \\
\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\,, \\
\frac{\partial P_i}{\partial Q_j} &= -\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial Q_i} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_i \partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial Q_i}\,.
\end{aligned} \tag{5.133}$$

Für die Umkehrfunktionen folgern wir aus diesem Ergebnis

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\,, \qquad \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_j}\,, \qquad \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\,. \tag{5.134}$$

Wir setzen nun die Definition (5.33) der Poisson-Klammer zweier Funktionen F, G ein:

$$\begin{aligned}
\{F,G\}_{q,p} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\right)\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_j} + \frac{\partial G}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_j} + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)\frac{\partial G}{\partial Q_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial P_j} - \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial Q_j}\right) = \{F,G\}_{Q,P}\,.
\end{aligned} \tag{5.135}$$

In der Mitte der Rechnung haben wir (5.134) verwendet, sowie am Ende die Poisson-Klammer bzgl. der Variablen Q und P mit Hilfe von (5.33) rekonstruiert. Bisher haben wir das Subskript q,p an der Poisson-Klammer hauptsächlich zur Unterscheidung

[16] Mit Hilfe einer kompakten Notation kann der Beweis gleichzeitig für alle vier mögliche Erzeugende F_1, $\hat{F}_2$, $\hat{F}_3$ und $\hat{F}_4$ geführt werden [22]. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns jedoch auf einen Fall.

von anderen Bedeutungen geschweifter Klammern verwendet. An dieser Stelle hat das Subskript darüber hinaus die wichtige Funktion, die verwendeten Variablen zu markieren.

Nun wollen wir zeigen, dass die fundamentalen Poisson-Klammern unter kanonischen Transformationen erhalten werden. Um die Herleitung etwas zu vereinfachen, schränken wir uns auf nicht explizit zeitabhängige Transformationen ein. Aufgrund der gerade gezeigten Invarianz der Poisson-Klammern können wir sie ohne Einschränkung der Allgemeinheit mit den alten Variablen q_i und p_i auswerten.

Wir beginnen mit der Zeitentwicklung einer Funktion $G(\{q_i\},\{p_i\},t)$, drücken diese nach (5.34) durch Poisson-Klammern aus und transformieren auf die neuen Variablen $Q_j(\{q_i\},\{p_i\})$, $P_j(\{q_i\},\{p_i\})$:

$$\begin{aligned}
\dot{G} &= \{G,H\}_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\right)\right. \\
&\qquad \left. -\frac{\partial G}{\partial p_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right)\right) + \frac{\partial G}{\partial t} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\{G,P_j\}_{q,p}\frac{\partial H}{\partial P_j} + \{G,Q_j\}_{q,p}\frac{\partial H}{\partial Q_j}\right) + \frac{\partial G}{\partial t}\,. \qquad (5.136)
\end{aligned}$$

Wir erinnern uns nun, dass im nicht explizit zeitabhängigen Fall $H = K$ gilt und spezialisieren zu $G = Q_i$ bzw. $G = P_i$:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= \sum_{j=1}^{n}\left(\{Q_i,P_j\}_{q,p}\frac{\partial K}{\partial P_j} + \{Q_i,Q_j\}_{q,p}\frac{\partial K}{\partial Q_j}\right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial K}{\partial P_i}\,, \\
\dot{P}_i &= \sum_{j=1}^{n}\left(\{P_i,P_j\}_{q,p}\frac{\partial K}{\partial P_j} + \{P_i,Q_j\}_{q,p}\frac{\partial K}{\partial Q_j}\right) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial K}{\partial Q_i}\,. \qquad (5.137)
\end{aligned}$$

Hier haben wir an die ursprüngliche Annahme erinnert, dass die Bewegungsgleichungen in den transformierten Variablen die Form (5.96) haben sollen.

Das Ergebnis (5.137) kann nur dann für beliebige $K(\{Q_i\},\{P_i\})$ richtig sein, wenn

$$\{Q_i,P_j\}_{q,p} = \delta_{i,j}\,, \qquad \{Q_i,Q_j\}_{q,p} = 0\,, \qquad \{P_i,P_j\}_{q,p} = 0\,. \qquad (5.138)$$

gilt. Dies bedeutet, dass die Variablen Q_i und P_i ebenfalls die fundamentalen Poisson-Klammern (5.40) erfüllen. Die Aussage, dass für kanonische Transformationen (5.138)

gilt, kann man auch mit Hilfe der oben gezeigten kanonischen Invarianz der Poisson-Klammer (5.135) überprüfen, wenn man die Definition der Poisson-Klammer (5.33) in $\{Q_i, P_j\}_{Q,P}$, $\{Q_i, Q_j\}_{Q,P}$ und $\{P_i, P_j\}_{Q,P}$ einsetzt und die Ableitungen ausführt. Um zu zeigen, dass (5.135) auch ein hinreichendes Kriterium dafür ist, dass eine Transformation kanonisch ist, ist jedoch eine längere Argumentation z.B. in der oben skizzierten Weise erforderlich.

Eine Transformation (5.95) ist also *genau dann kanonisch, wenn (5.138) gilt*. Dies ist ein nützliches Kriterium, da es leicht explizit nachgeprüft werden kann, wie wir an einigen Beispielen zeigen wollen.

Betrachten wir z.B. die *Vertauschung von Koordinaten und Impulsen*

$$Q_i = p_i\,, \qquad P_i = q_i\,, \tag{5.139}$$

so lauten die Poisson-Klammern

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \{p_i, q_j\}_{q,p} = -\delta_{i,j}\,, \qquad \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0\,, \qquad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0\,. \tag{5.140}$$

Die Transformation (5.139) ist somit nicht im engeren Sinn kanonisch. Allerdings könnte man vermuten, dass der Koeffizient vor dem $\delta_{i,j}$ dem c aus (5.99) entspricht, die Transformation (5.139) also im weiteren Sinn kanonisch ist.

Tatsächlich kann man eine weitere Transformation vom Typ (5.100) nachschalten und das Vorzeichen von Q_i ändern:

$$Q_i = -p_i\,, \qquad P_i = q_i\,, \tag{5.141}$$

Für die in (5.141) definierte Transformation findet man die Poisson-Klammern

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = -\{p_i, q_j\}_{q,p} = \delta_{i,j}\,, \qquad \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0\,, \qquad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0\,. \tag{5.142}$$

Dies hat genau die gesucht Form (5.138); die Transformation (5.141) ist also im engeren Sinn kanonisch.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Verallgemeinerung von (5.118) mit einem Exponenten z:

$$Q = p\,q^2\,, \qquad P = \frac{1}{q^z}\,. \tag{5.143}$$

Aufgrund der Antisymmetrie der Poisson-Klammer ist $\{Q, Q\}_{q,p} = 0 = \{P, P\}_{q,p}$ sichergestellt, ohne dass man dies explizit nachrechnen müßte. Es verbleibt also eine Relation zu prüfen:

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\underbrace{\frac{\partial P}{\partial p}}_{=0} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -q^2\,(-z)\,\frac{1}{q^{z+1}} = \frac{z}{q^{z-1}} \stackrel{!}{=} 1\,. \tag{5.144}$$

Es folgt, dass (5.143) genau dann kanonisch ist, wenn $z = 1$ gilt, d.h. in dem bereits in Unterkapitel (5.4.1) diskutierten Fall.

Einige Lehrbücher wie z.B. [10,11] fahren an dieser Stelle mit infinitesimalen Transformationen fort und diskutieren Symmetrien und Erhaltungssätze. Aus Zeitgründen verzichten wir darauf. Wir wollen allerdings noch einmal an die Charakterisierung (5.47) von Erhaltungsgrößen durch ihre Poisson-Klammern mit der Hamiltonfunktion erinnern.

5.5 Hamilton-Jacobi Theorie

Aus technischer Sicht dienen die kanonischen Transformationen vor allem dazu, die Hamiltonfunktion und damit die Lösung der Bewegungsgleichung möglichst einfach zu machen. Besonders einfach wird das Problem dann, wenn es gelingt, eine kanonsiche Transformation (5.95) zu finden, die die neue Hamiltonfunktion K *unabhängig* von den Variablen Q_i und P_i macht. In diesem Fall lauten die Bewegungsgleichungen (5.96) nämlich $\dot{Q}_i = 0 = \dot{P}_i$, so dass die Werte von Q_i und P_i entlang jeder Bahnkurve konstant sind. Die Information über die Bahnkurve in den ursprünglichen Koordinaten ist in einem solchen Fall ausschließlich in der zeitabhängigen Transformation $q_j(\{Q_i\}, \{P_i\}, t)$, $p_j(\{Q_i\}, \{P_i\}, t)$ enthalten (vgl. das Beispiel aus Unterkapitel 5.4.3 für erste Schritte in diese Richtung).

Praktisch implementiert man diesen Zugang, indem man fordert, dass die neue Hamiltonfunktion identisch verschwindet:

$$K = 0\,. \tag{5.145}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.96) für die Funktion K lauten in diesem Fall

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0\,, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0\,. \tag{5.146}$$

Gesucht ist also eine kanonische Transformation zu gegebenem H, so dass (5.145) gilt. Die Lösung dieser Aufgabe wird dem Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) zugeschrieben und ist daher mit seinem Namen verbunden.

Wir wollen die Diskussion mit einer Erzeugenden vom Typ $\hat{F}_2$ durchführen. Dann gilt nach (5.110) und unter Berücksichtigung von (5.145):

$$K = H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) + \frac{\partial \hat{F}_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)}{\partial t} = 0\,. \tag{5.147}$$

Da wir q_i und P_i als unabhängige Variable betrachten wollen, eliminieren wir p_i mit Hilfe von (5.110):

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial \hat{F}_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)}{\partial t} = 0\,. \tag{5.148}$$

Dies ist die sogenannte *Hamilton-Jacobi-Gleichung*. Da die Hamiltonfunktion H im allgemeinen eine nichtlineare Funktion der $p_i = \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial q_i}$ ist, ist (5.148) im allgemeinen eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für die Erzeugende $\hat{F}_2$ als Funktion der $n+1$ Variablen q_i und t.

Ist es uns für ein gegebenes H gelungen, eine Funktion $\hat{F}_2$ zu finden, die die Gleichung (5.148) erfüllt, so müssen wir lediglich die Beziehungen (5.110)

$$p_i = \frac{\partial \hat{F}_2(\{q_i\},\{P_i\},t)}{\partial q_i}\,, \qquad Q_i = \frac{\partial \hat{F}_2(\{q_i\},\{P_i\},t)}{\partial P_i} \tag{5.149}$$

nach $q_j(\{q_i\},\{P_i\},t)$ und $p_j(\{q_i(\{q_k\},\{P_k\},t)\},\{P_i\},t)$ auflösen um die Lösung in den ursprünglichen Variablen zu erhalten.

Eine vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (5.148) heißt *Prinzipalfunktion* oder *Hamiltonsche Wirkungsfunktion* und wird für gewöhnlich mit S bezeichnet. In S treten aufgrund der $n+1$ unabhängigigen Variablen q_i und t insgesamt $n+1$ Integrationskonstanten α_i auf. Eine dieser Integrationskonstanten, die wir mit α_{n+1} identifizieren, ist irrelevant, da S und $S+\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ äquivalente Prinzipalfunktionen sind. Wir wählen somit als Parametrisierung

$$S = (q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,t)\,. \tag{5.150}$$

Da wir eine eine Erzeugende vom Typ $\hat{F}_2$ gewählt hatten, gilt gemäß (5.110):

$$\alpha_i = P_i\,, \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\,, \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} =: \beta_i\,. \tag{5.151}$$

Im allgemeinen versucht man nun, die Hamilton-Jacobi-Gleichung (5.148) für S mit einem Separationsansatz zu lösen.

Für eine *nicht explizit zeitabhängige* Hamiltonfunktion H kann man zunächst den Separationsansatz

$$S(\{q_i\},\{\alpha_i\},t) = W(\{q_i\},\{\alpha_i\}) - \alpha_1\, t \tag{5.152}$$

machen. Die Funktion $W(\{q_i\},\{\alpha_i\})$ wird als *charakteristische* Funktion bezeichnet. Setzt man den Ansatz (5.152) in (5.148) ein, so findet man

$$H\left(\{q_i\},\left\{\frac{\partial W}{\partial q_i}\right\},t\right) = \alpha_1 = E\,, \tag{5.153}$$

wobei E in einem Inertialsystem und für skleronome Zwangsbedigungen die Energie ist.

Das weitere Vorgehen hängt von der Form von H ab. Hat die Hamiltonfunktion z.B. die Form

$$H\left(\{q_i\},\{p_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} H_i\left(q_i,p_i\right)\,, \tag{5.154}$$

so kann man folgenden Separationsansatz verwenden:

$$W(\{q_i\},\{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^{n} W_i\left(q_i,\{\alpha_i\}\right) . \tag{5.155}$$

Gemäß (5.153) gilt dann

$$\sum_{i=1}^{n} H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, t\right) = \alpha_1 = E\,, \tag{5.156}$$

bzw.

$$H_j\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}, t\right) = \alpha_1 - \sum_{i\neq j} H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, t\right) . \tag{5.157}$$

Die linke Seite hängt nun von q_j und die rechte Seite nur von Koordinaten q_i mit $i \neq j$ ab. Somit müssen beide Seiten konstant sein. Für $j > 1$ bezeichnen wir die Konstanten mit α_j, so dass (5.157) folgende Form annimmt:

$$H_j\left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j}, t\right) = \alpha_j \qquad \text{für } j > 1\,. \tag{5.158}$$

Damit sind alle Integrationskonstanten gewählt, so dass aus (5.157) und (5.158) folgende Gleichung für $j = 1$ folgt:

$$H_1\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, t\right) = \alpha_1 - \sum_{i>1} \alpha_i\,. \tag{5.159}$$

5.5.1 Zentralproblem

Wir wollen das oben skizzierte Verfahren nun auf die Lösung des Zentralproblems anwenden. Dazu benötigen wir zunächst die Hamiltonfunktion. Diese ist im Prinzip durch die Energie (4.39) gegeben, allerdings müssen wir $\dot{r}$ noch durch p_r ersetzen. Mit der Lagrange-Funktion (4.34) findet man

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\,\dot{r} \tag{5.160}$$

und somit

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{1}{2\,\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r)\,. \tag{5.161}$$

Zunächst separieren wir die Zeit nach (5.152) ab. Damit lautet die Differentialgleichung (5.153) für die charakteristische Funktion W:

$$\frac{1}{2\,\mu}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right) + V(r) = \alpha_1 = E\,. \tag{5.162}$$

Zwar hat die Hamiltonfunktion (5.161) nicht genau die Form (5.154), aber wir machen dennoch den Ansatz (5.155), d.h.

$$W(r,\varphi,E,\alpha_2) = W_1(r,E,\alpha_2) + W_2(\varphi,E,\alpha_2)\,. \tag{5.163}$$

Setzen wir dies in (5.162) ein, so finden wir

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 = 2\,\mu\,r^2\,\left(E - V(r)\right) - r^2\,\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2\,. \tag{5.164}$$

Offensichtlich sind beide Seiten Funktionen unterschiedlicher Variable und somit konstant. Im Sinn von (5.158) bezeichnen wir diese Konstante mit α_2 und finden dann nach einmaliger Integration

$$W_2 = \sqrt{\alpha_2}\,\varphi\,, \qquad W_1 = \int \mathrm{d}r\,\sqrt{2\,\mu\,\left(E - V(r)\right) - \frac{\alpha_2}{r^2}}\,. \tag{5.165}$$

Die physikalische Bedeutung von α_2 identifizieren wir mit Hilfe von (5.151):

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} = \sqrt{\alpha_2}\,. \tag{5.166}$$

Insgesamt lautet die Prinzipalfunktion S also

$$S = W_1 + W_2 - E\,t = \int \mathrm{d}r\,\sqrt{2\,\mu\,\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}} + p_\varphi\,\varphi - E\,t\,. \tag{5.167}$$

Wiederum mit (5.151) folgt schließlich

$$\beta_1 \;=\; \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial E} = \int \mathrm{d}r\,\frac{\mu}{\sqrt{2\,\mu\,\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}} - t\,, \tag{5.168}$$

$$\beta_2 \;=\; \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = -\int \mathrm{d}r\,\frac{p_\varphi}{r^2\,\sqrt{2\,\mu\,\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}} + \varphi\,. \tag{5.169}$$

Die Ergebnisse (5.168) und (5.169) sind nichts anderes als die früheren Ergebnisse (4.41) bzw. (4.44) mit $t_0 = -\beta_1$ bzw. $\varphi_0 = \beta_2$.

Dieses Beispiel zeigt die volle Eleganz der Hamilton-Jacobi Theorie bei der Lösung komplexer Probleme.

5.6 Liouvillescher Satz

Wir wollen schließlich noch auf den nach dem Mathematiker Joseph Liouville (1809-1882) benannten *Liouvilleschen Satz* eingehen, der besagt, dass die Dichte von Bahnen im *Phasenraum* invariant unter der Zeitentwicklung ist. Dieser Satz ist z.B. wichtig für die statistische Mechanik.

Der Liouvillesche Satz folgt im wesentlichen aus der Anwendung der Zeitentwicklung als kanonischer Transformation auf die kanonische Invarianz der Phasenraumvolumens. Wir müsssen also etwas Vorarbeit leisten und beide Aussagen herleiten.

5.6.1 Zeitentwicklung als kanonische Transformation

Für eine gegebene Hamiltonfunktion H betrachten wir die Erzeugende

$$\hat{F}_2(\{q_i\},\{P_i\},t) = \sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i + H(\{q_i\},\{P_i\},t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{5.170}$$

wobei $\mathrm{d}t$ ein infinitesimales Zeitintervall ist. Nach (5.110) erzeugt dies die kanonische Transformation

$$p_i = \frac{\partial\,\hat{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \frac{\partial\,H}{\partial q_i}\,\mathrm{d}t\,, \qquad Q_i = \frac{\partial\,\hat{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \frac{\partial\,H}{\partial P_i}\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.171}$$

Wir stellen zunächst die erste Gleichung um und setzen die Bewegungsgleichung (5.11) für p_i ein:

$$P_i = p_i - \frac{\partial\,H}{\partial q_i}\,\mathrm{d}t = p_i + \dot{p}_i\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.172}$$

Wir schließen damit zunächst (man beachte, dass q_i und P_i als unabhängig betrachtet werden):

$$\frac{\partial\,H}{\partial P_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\,H}{\partial p_j}\,\frac{\partial\,p_j}{\partial P_i} = \frac{\partial\,H}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\mathrm{d}t)\,. \tag{5.173}$$

Dies setzen wir nun in die zweite Gleichung von (5.171) ein und verwenden die Bewegungsgleichung (5.11) für q_i:

$$Q_i = q_i + \frac{\partial\,H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^2) = q_i + \dot{q}_i\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^2)\,. \tag{5.174}$$

Die Ergebnisse (5.172) und (5.174) können wir nun als Taylor-Entwicklung in der Form

$$P_i = p_i(t+\mathrm{d}t) + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^2)\,, \qquad Q_i = q_i(t+\mathrm{d}t) + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^2) \tag{5.175}$$

schreiben. Die Erzeugende (5.170) führt also zu einer kanonischen Transformation, die den Variablen $q_i(t)$, $p_i(t)$ die Werte $P_i \approx p_i(t+\mathrm{d}t)$, $Q_i \approx q_i(t+\mathrm{d}t)$ nach einer infinitesimalen Zeitentwicklung zuordnet. Dies zeigt, dass die infinitesimale Zeitentwicklung eine kanonische Transformation ist.

Kanonische Transformationen sind über Invarianzen definiert (z.B. der Bewegungsgleichungen, siehe (5.96), oder der Poisson-Klammern, siehe Unterkapitel 5.4.4). Es folgt, dass die Komposition zweier kanonischer Transformationen wieder eine kanonische Transformation ist (die kanonischen Transformationen bilden tatsächlich eine Gruppe). Wenden wir dies auf unser Ergebnis an, so schließen wir, dass die Hintereinanderausführung von beliebig vielen infinitesimalen Zeitentwicklungen, d.h. eine *endliche Zeitentwicklung*

$$q_i(t_0) \mapsto q_i(t)\,, \qquad p_i(t_0) \mapsto p_i(t) \tag{5.176}$$

ebenfalls kanonisch ist.

Die Zeitentwicklung der Hamiltonschen Mechanik ist somit eine kontinuierliche kanonische Transformation, die von dem Parameter $t-t_0$ abhängt. Diese kontinuierliche kanonische Transformation wird auch als *Hamiltonscher Fluß* auf dem Phasenraum bezeichnet.

5.6.2 Kanonische Invarianz des Phasenraumvolumens

Wir wollen nun zeigen, dass Integrale über den $2\,n$-dimensionalen Phasenraum invariant sind unter kanonischen Transformationen. Für eine Funktion $g(\{q_i\},\{p_i\})$ gilt also nach einer kanonischen Transformation $q_i \mapsto Q_i$, $p_i \mapsto P_i$:

$$\int \mathrm{d}^n q\, \mathrm{d}^n p\; g(\{q_i\},\{p_i\}) = \int \mathrm{d}^n Q\, \mathrm{d}^n P\; g(\{Q_i\},\{P_i\})\,, \tag{5.177}$$

wobei natürlich der Integrationsbereich entsprechend transformiert werden muß.

Wir führen folgende abkürzende Schreibweise für Funktionaldeterminanten ein:

$$\frac{\partial\,(y_1,\ldots,y_N)}{\partial(x_1,\ldots,x_N)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\, y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\, y_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\, y_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\, y_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}\,. \tag{5.178}$$

Nun wissen wir aus der mehrdimensionalen Analysis, dass folgende Substitutionsregel für Integrale gilt:

$$\int \mathrm{d}^n Q\, \mathrm{d}^n P\; g(\{Q_i\},\{P_i\}) = \int \mathrm{d}^n q\, \mathrm{d}^n p\; D\, g(\{q_i\},\{p_i\}) \tag{5.179}$$

mit

$$D = \frac{\partial\,(Q_1,\ldots,Q_n,P_1,\ldots,P_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)}\,. \tag{5.180}$$

Wir müssen somit zeigen, dass die Funktionaldeterminante D einer kanonischen Transformation gleich Eins ist.

Wir nehmen an, dass eine Erzeugende vom Typ F_1 existiert, so dass wir (5.179) auf q_i und Q_i als unabhängige Variable umschreiben müssen. Zunächst führen wir eine weitere Substitution ein, beachten dass die Determinante eines Produkts von Matrizen das Produkt der Determinanten ist, und ferner, dass die Funktionaldeterminante der Umkehrfunktion die Inverse der Funktionaldeterminante ist:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial\,(Q_1,\ldots,Q_n,P_1,\ldots,P_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,Q_1,\ldots,Q_n)}\,\frac{\partial\,(q_1,\ldots,q_n,Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)} \qquad (5.181)\\ &= \frac{\dfrac{\partial\,(Q_1,\ldots,Q_n,P_1,\ldots,P_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,Q_1,\ldots,Q_n)}}{\dfrac{\partial\,(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,Q_1,\ldots,Q_n)}} = (-1)^n\,\frac{\dfrac{\partial\,(P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,Q_1,\ldots,Q_n)}}{\dfrac{\partial\,(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,Q_1,\ldots,Q_n)}}\,. \end{aligned}$$

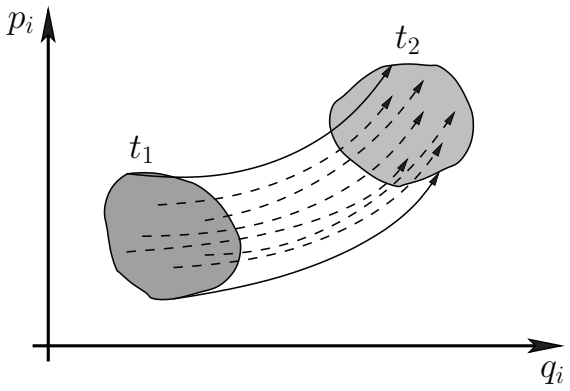


Abbildung 5.5: *Entwicklung eines Volumens $\Delta\Gamma$ im Phasenraum (grau markiert) von der Zeit t_1 zur Zeit t_2.*

Der Faktor $(-1)^n$ im letzten Schritt ergibt sich dadurch, dass wir in der Determinante im Zähler die ersten n Zeilen mit den letzten n Zeilen vertauscht haben. Nun können wir verwenden, dass Variablen, die sich unter der Substition nicht ändern, in den Funktionaldeterminanten weggelassen werden können. Somit folgt aus (5.181):

$$D = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial\,(P_1, \ldots, P_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)}}{\dfrac{\partial\,(p_1, \ldots, p_n)}{\partial(Q_1, \ldots, Q_n)}}\,. \tag{5.182}$$

Schließlich erinnern wir uns daran, dass wir in Unterkapitel 5.4.4 mit Hilfe der Erzeugenden F_1 die Identität $\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$ hergeleitet hatten (siehe (5.133)). Damit folgt

$$\frac{\partial\,(p_1, \ldots, p_n)}{\partial(Q_1, \ldots, Q_n)} = (-1)^n \frac{\partial\,(P_1, \ldots, P_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)}\,. \tag{5.183}$$

Einsetzen von (5.183) in (5.182) liefert das gesuchte Ergebnis $D = 1$. Wir haben somit gezeigt, dass Integrale über den Phasenraum unter kanonischen Transformationen invariant sind.

5.6.3 Herleitung des Liouvilleschen Satzes

Wir wollen nun die Ergebnisse der letzten beiden Unterkapitel verwenden, um den Satz von Liouville herzuleiten. Der Satz von Liouville macht eine Aussage über die Zeitentwicklung der Dichte von Bahnen im Phasenraum. Man betrachtet also ein Ensemble einer großen Anzahl physikalisch identischer Systeme, die allerdings aufgrund unterschiedlicher Anfangsbedingungen unterschiedliche Bahnkurven realisieren.

Zu einer gegebenen Zeit t betrachten wir ein Volumenelement $\Delta\Gamma$ des $2\,n$-dimensionalen Phasenraums. Das betrachtete Ensemble besitze zur Zeit t eine Anzahl ΔG von Bahnen in diesem Volumenelement. Damit ergibt sich die mittlere Dichte der Bahnen in diesem Volumenelement zu:

$$g(\Delta\Gamma, t) = \frac{\Delta G}{|\Delta\Gamma|}\,. \tag{5.184}$$

Hierbei ist $|\Delta\Gamma|$ die Größe des Volumens.

Wir nehmen nun an, dass alle Systeme des Ensembles den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) mit einer gemeinsamen Hamiltonfunktion $H(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ unterliegen. Nach Unterkapitel 5.6.1 ist die Zeitentwicklung der Systeme eine kanonische Transformation. Betrachten wir die Zeitentwicklung aller Punkte aus $\Delta\Gamma(t_1)$ von der Zeit t_1 bis zu t_2, so erhalten wir ein neues Volumenelement $\Delta\Gamma(t_2)$ (siehe Abb. 5.5). Da die Transformation von $\Delta\Gamma(t_1)$ auf $\Delta\Gamma(t_2)$ kanonisch ist, sind nach Unterkapitel 5.6.2 die *Volumina* identisch (allerdings ändert $\Delta\Gamma$ im allgemeinen seine Form). Die Größe des Volumens $|\Delta\Gamma|$ ist also zeitlich konstant.

Wir wollen nun argumentieren, dass die Anzahl der Bahnen ΔG in dem Volumen $\Delta\Gamma$ ebenfalls zeitlich konstant sind. Zunächst bemerken wir, dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) Differentialgleichungen erster Ordnung sind, die die Bahnkurven $q_i(t)$, $p_i(t)$ für gegebene Anfangsbedingungen $q_i(t_0)$, $p_i(t_0)$ eindeutig bestimmen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit können sich zwei verschiedene Bahnkurven im Phasenraum zu gleichen Zeiten t nicht schneiden. Aus dieser Beobachtung folgern wir, dass es keine Bahnen gibt, die aus dem Volumen $\Delta\Gamma$ heraus oder in das Volumen hineinführen. Eine solche Bahnkurve müßte nämlich einen Randpunkt schneiden. Dieser Randpunkt entspricht aber nun einer anderen Bahnkurve, so dass ein Schnitt ausgeschlossen ist. Es folgt, dass die Anzahl ΔG der Bahnen in $\Delta\Gamma$ ebenfalls zeitlich konstant ist.

Da sowohl $|\Delta\Gamma|$ als auch ΔG zeitlich konstant sind, folgt aus (5.184), dass $g(\Delta\Gamma, t)$ ebenfalls zeitlich konstant ist. Wir haben also gezeigt, dass die mittlere Bahndichte $g(\Delta\Gamma, t)$ in einem beliebigen Volumen $\Delta\Gamma$ des Phasenraums eine *Erhaltungsgröße* ist. Allerdings ist diese Erhaltungsgröße unhandlich, da sie von dem gesamten betrachteten Volumen abhängt. Wir gehen nun zu einem infinitesimalen Volumen $\mathrm{d}\Gamma$ um einen Phasenraumpunkt q_i, p_i über, so daß das Volumen durch diesen Punkt parametrisiert werden kann. Es ist ferner üblich, die Dichte auf die Gesamtzahl G der Bahnen zu normieren. Wir gehen somit von der Phasenraumdichte g zu einer Verteilungsfunktion ρ über[17]:

$$g(\Delta\Gamma, t) \quad \rightarrow \quad \rho(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \frac{\mathrm{d}G}{G\ |\mathrm{d}\Gamma|}\,. \tag{5.185}$$

[17] ρ ist nach Konstruktion auf Eins normiert: $\int \mathrm{d}^n q\, \mathrm{d}^n p\ \rho(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = 1$.

Da sich ρ bis auf Normierung als Grenzwert $|\Delta\Gamma| \to 0$ von $g(\Delta\Gamma, t)$ ergibt, folgt aus der Erhaltung von $g(\Delta\Gamma, t)$, dass $\rho(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist. Mit Hilfe der Poisson-Klammer kann dieser Erhaltungssatz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}t} = \{\rho, H\}_{q,p} + \frac{\partial\,\rho}{\partial t} = 0\,. \tag{5.186}$$

Dies ist der *Satz von Liouville*. Man beachte, dass wir über die Bahnkurven im Volumen $\Delta\Gamma$ keine Annahmen gemacht hatten. Der Satz Satz von Liouville gilt somit für beliebige Verteilungsfunktionen $\rho(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$ identischer Systeme, die jeweils der Hamiltonschen Zeitentwicklung (5.11) unterliegen, aber untereinander nicht wechselwirken.

Eine Konsequenz des Satzes von Liouville ist, dass die Gesamtheit aller Phasenpunkte im Verlauf der Zeit wie eine *inkompressible Flüssigkeit* durch den Phasenraum strömt.

Der Satz von Liouville erlaubt ferner die Einführung einer erhaltenen Wahrscheinlichkeitsdichte im Phasenraum, die die Grundlage der statistischen Mechanik bildet. Wesentlich ist hierbei, dass sich die Bahnen im Phasenraum nicht schneiden können. Die Angabe der Koordinaten q_i ist hingegen nicht hinreichend, um den Zustand eines mechanischen Systems eindeutig zu spezifizieren. Eine Hinzunahme der Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ ist im allgemeinen nicht sinnvoll, da die Invarianz im allgemeinen nur für die Impulse p_i (die im allgemeinen *ungleich* $m_i\,\dot{q}_i$ sind) gilt. Somit kann eine forminvariante Formulierung der statistischen Mechanik nur auf der Hamiltonschen, nicht aber auf der Langrangeschen Mechanik aufgebaut werden.

Beispiel: Als ein ganz einfaches Beispiel betrachten wir den senkrechten *freien Fall* eines Teilchens der Masse m. Wählen wir q als vertikale nach unten gerichtete Koordinate, so lautet die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2\,m} - m\,g\,q = E\,. \tag{5.187}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (5.11) lauten damit

$$\dot{q} = \frac{\partial\,H}{\partial p} = \frac{p}{m}\,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial\,H}{\partial q} = m\,g\,. \tag{5.188}$$

Die Bewegungsgleichungen können zunächst für p und anschließend für q leicht integriert werden. Bezeichnet man die Anfangswerte zur Zeit t_1 mit $p(t_1)$ bzw. $q(t_1)$, so lautet die Lösung

$$p(t) = p(t_1) + m\,g\,(t - t_1)\,, \qquad q(t) = q(t_1) + \frac{p(t_1)}{m}\,(t - t_1) + \frac{g}{2}\,(t - t_1)^2\,. \tag{5.189}$$

Die Bahnkurven im Phasenraum sind somit Parabeln, wie in Abb. 5.6 skizziert.

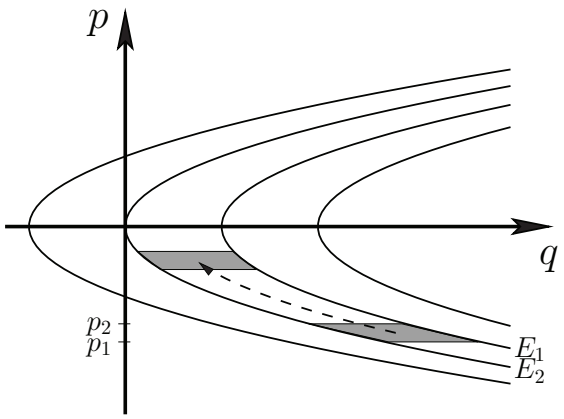


Abbildung 5.6: *Bahnkurven eines senkrechten freien Falls im Phasenraum.*

Die Form $p(q)$ der Bahnkurven erhält man direkter, indem man die Erhaltung der Energie E verwendet und (5.187) auflöst:

$$p(q) = \sqrt{2\,m\,(E + m\,g\,q)}\,. \tag{5.190}$$

Insbesondere gilt, dass die Bahnkurven zu unterschiedlichen Werten der Energie E horizontal entlang der q-Achse verschoben sind, ansonsten aber die gleiche Form haben (vgl. auch Abb. 5.6). Insbesondere schneiden sich die Bahnkurven im Phasenraum nicht.

Für festen Impuls p sind E und q als Parameter äquivalent, denn nach (5.187) gilt $q = \frac{1}{m\,g}\left(\frac{p^2}{2\,m} - E\right)$. Wir betrachten nun ein Ensemble, das zur Zeit $t = t_1$ eine konstante Dichte im Bereich

$$\Delta\Gamma(t_1) = \{(q,p) \mid p_1 \leq p \leq p_2,\; E_1 \leq E \leq E_2\} \tag{5.191}$$

besitzt. Die Fläche (5.191) ist im unteren Teil von Abb. 5.6 grau schraffiert dargestellt.

Nun ist einerseits die Energie E eine Erhaltungsgröße, andererseits haben wir für $p(t)$ die explizite Lösung (5.189). Also können wir die Zeitentwicklung der Fläche (5.191) direkt angeben:

$$\Delta\Gamma(t) = \{(q,p) \mid p_1 + m\,g\,(t-t_1) \leq p \leq p_2 + m\,g\,(t-t_1),\; E_1 \leq E \leq E_2\}\,. \tag{5.192}$$

Der zugehörige Flächeninhalt ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
|\Delta\Gamma(t)| &= \int\limits_{p_1+m\,g\,(t-t_1)}^{p_2+m\,g\,(t-t_1)} \mathrm{d}p \int\limits_{q(E_2)}^{q(E_1)} \mathrm{d}q \\
&= \frac{1}{m\,g} \int\limits_{p_1+m\,g\,(t-t_1)}^{p_2+m\,g\,(t-t_1)} \mathrm{d}p \left(\left(\frac{p^2}{2\,m} - E_1 \right) - \left(\frac{p^2}{2\,m} - E_2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{m\,g} \int\limits_{p_1+m\,g\,(t-t_1)}^{p_2+m\,g\,(t-t_1)} \mathrm{d}p \; (E_2 - E_1) \\
&= \frac{E_2 - E_1}{m\,g} \; ((p_2 + m\,g\,(t-t_1)) - (p_1 + m\,g\,(t-t_1))) \\
&= \frac{E_2 - E_1}{m\,g} \; (p_2 - p_1) \; . \qquad (5.193)
\end{aligned}
$$

Wir stellen fest, dass der Flächeninhalt unabhängig von t ist, genau wie wir es nach dem Liouvilleschen Satz erwarten, während die Form der Fläche $\Delta\Gamma$ von der Zeit t abhängt (siehe Abb. 5.6).

6 Schlußbemerkungen

Wie eingangs bemerkt, erhebt dieses Skript nicht den Anspruch eines Lehrbuches. So fehlen u.a. einige Aspekte, die zwar zu einer vollständigen Behandlung gehören, auf die man aber zur Not verzichten kann. So hat die Vorlesung gerade im letzten Kapitel zur Hamiltonschen Mechanik Lücken gelassen. Zu den Lücken, die sich auch im Skript widerspiegeln, gehören z.B. Winkel- und Wirkungsvariable, die für den Übergang zur Quantenmechanik (Bohrsche Quantisierung) nützlich wären. Da man aber sonst z.B. Winkel- und Wirkungsvariable nicht unbedingt braucht, hoffe ich, dass die Lücken vertretbar sind.

Ich möchte ferner auf die Übungsaufgaben hinweisen, die wesentlicher Bestandteil der Analytischen Mechanik sind, jedoch in diesem Skript nicht im Einzelnen erwähnt werden. Insbesondere möchte ich Stephan Filor für die engagierte und kompetente Betreuung des Übungsbetriebs danken, sowie den Tutoren für die Durchführung der Übungsgruppen. Wenn dies auch nicht direkt ersichtlich ist, so beinhaltet dieses Skript dennoch Rückkopplungen aus dem Übungsbetrieb. Danken möchte ich auch den vielen Hörern, die sich nicht mit dem Skript begnügen wollten, sondern aktiv an der Vorlesung teilgenommen haben und durch zahlreiche Hinweise auch bei der Elimination von Fehlern aus diesem Skript geholfen haben. Vermutlich enthält das Skript trotzdem noch einige (Tipp-) Fehler – entsprechende Hinweise nehme ich weiter gerne entgegen.

Göttingen, 25. Januar 2009

Andreas Honecker

7 Einige wichtige Gleichungen

(1.24)	Newtonsche Bewegungsgleichungen
(2.3)	holonome Zwangsbedingungen
(2.13)	Newtonsche Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften
(2.32)	d'Alembertsche Bewegungsgleichungen
(3.18)	Lagrangegleichungen 2. Art
(3.60)	Lagrangegleichungen 1. Art
(3.156)	Euler-Lagrange-Gleichungen
(3.161)	Wirkung S
(3.165)	Kanonisch konjugierter Impuls
(3.186)	Noether-Theorem: Explizite Form einer Erhaltungsgröße
(4.35)	Drehimpuls eines Zentralproblems
(4.41,4.42,4.44)	Lösung des Zentralproblems in Integralform
(4.45)	Effektives Potential für ein Zentralproblem
(4.61)	Form der Bahnkurve im Kepler-Potential (4.48)
(4.79)	Differentieller Wirkungsquerschnitt für ein rotationssymmetrisches Potential
(4.102)	Trägheitstensor eines starren Körpers in Komponenten: (4.103), als Matrix: (4.105)
(5.8)	Hamiltonfunktion H
(5.11)	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen
(5.33)	Poisson-Klammer
(5.40)	fundamentale Poisson-Klammern
(5.101)	Kanonische Transformationen (im engeren Sinn)
(5.148)	Hamilton-Jacobi-Gleichung
(5.186)	Liouvillescher Satz

8 Notation

t	Zeit
T	Kinetische Energie
V	Potentielle Energie
L	Lagrangefunktion, $L = T - V$
H	Hamiltonfunktion
I	Trägheitstensor eines starren Körpers
$\vec{x}$	Vektor (für gewöhnlich $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$)
$f' = \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}x}$	Ableitung der Funktion $f(x)$ nach ihrem Argument x
$f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$	Zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ nach ihrem Argument x
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f$	Totale Ableitung der Funktion f nach s
$\dot{X} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X$	Totale Ableitung der Größe X nach der Zeit t
$\ddot{X} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} X$	Zweite totale Ableitung der Größe X nach t
$\frac{\partial}{\partial s} f$	Partielle Ableitung der Funktion f nach s
$\vec{\nabla} f(\vec{x})$	Gradient eines skalaren Feldes $f(\vec{x})$
$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})$	Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{x})$
$\oint_C$	Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve C
$\{F, G\}_{q,p}$	Poisson-Klammer von F und G

Literatur

[1] V.I. Arnol'd, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser Verlag (1988).

[2] J. Bernoulli, *Analysis problematis ante hac propositi, de inventione linea descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequales altitudines emetiatur: & alterius cujusdam Problematis Propositio*, Acta Eruditorum (1690) 217-219.

[3] J. Bertrand, *Mécanique Analytique. – Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences **77** (1873) 849-853.

[4] G. Coriolis, *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*, Journal de L'École Royale Polytechnique **15** (1835) 142-154.

[5] J. le R. d'Alembert, *Traité de dynamique*, Paris (1743).

[6] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Lausanne & Genf (1744).

[7] L. Euler, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, Rostock & Greifswald (1765).

[8] T. Fließbach, *Mechanik*, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag (2007).

[9] H. Geiger, E. Marsden, *On a Diffuse Reflection of the α-Particles*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A **82** (1909) 495-500.

[10] H. Goldstein, *Klassische Mechanik*, Akademische Verlagsgesellschaft (1963).

[11] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics, Third Edition*, Addison Wesley (2002).

[12] W.R. Hamilton, *On a General Method in Dynamics; by which the Study of the Motions of all free Systems of attracting or repelling Points is reduced to the Search and Differentiation of one central Relation, or characteristic Function*, Philosophical Transactions of the Royal Society **II** (1834) 247-308.

[13] W.R. Hamilton, *Second Essay on a General Method in Dynamics*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **125** (1835) 95-144.

[14] G.C. Hegerfeldt, *Mechanik*, Ausarbeitung von T. Nowotny und O. Ronneberger, Göttingen (1994).

[15] J. Kepler, *Astronomia nova, seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae martis* (1609).

[16] J. Kepler, *Harmonices mundi* (1619).

[17] F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Physik-Verlag (1983).

[18] F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 8. Auflage, Wiley-VCH (2008).

[19] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik I, Mechanik*, 12. Auflage, Akademie-Verlag Berlin (1987).

[20] J.L. Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris (1788), nachgedruckt in Band 11 von *Œuvres de Lagrange*, Paris (1867).

[21] W. Lenz, *Über den Bewegungsverlauf und Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung*, Zeitschrift für Physik **24** (1924) 197-207.

[22] S.L. Mor, *Note on the canonical invariance of the Poisson brackets*, Am. J. Phys. **47** (1979) 119.

[23] I. Newton, *Philosophia naturalis principia mathematica*, Cambridge (1713).

[24] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1918) 235-257.

[25] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 2, Analytische Mechanik*, 7. Auflage, Springer (2006).

[26] C. Runge, *Vektoranalysis*, Band 1, Hirzel, Leipzig (1919).

[27] E. Rutherford, *The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom*, Philosophical Magazine **21** (1911) 669-688.

[28] K. Schönhammer, *Mechanik-Skript* (2006).